



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Michal Maixner

Vizualizace černoděrových prostoročasu

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická Fyzika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád by som poďakoval vedúcemu práce prof. RNDr. Pavlovi Krtoušovi, Ph.D. za jeho cenné rady, trpezlivosť a čas. Taktiež chcem poďakovať rodičom a priateľke za podporu pri štúdiu a v neposlednom rade aj celej Univerzite Karlovej a vláde Českej a Slovenskej Republiky, ktoré toto štúdium umožnili.

Názov práce: Vizualizace černoděrových prostoročasů

Autor: Michal Maixner

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedúcí diplomovej práce: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Práca sa zaoberá vizualizáciou Schwarzschildovej, Reissnerovej-Nordströmovej a Kerrovej čiernej diery. Skonštruovali sme dvojrozmerné konformné diagramy zobrazujúce kauzálnu štruktúru jednotlivých priestoročasov. V prípade Kerrovej čiernej diery sme zobrazili kauzálnu štruktúru pomocou prieniku chronologickej budúcnosti daného bodu priestoročasu s nadplochami konštantných hodnôt Boyerovej-Lindquistovej súradnice t . Pre Kerrovu čiernu diery sme konformný diagram skonštruovali len pre okolie vonkajšieho horizontu udalostí. Následne sme skonštruovali kauzálny diagram, ktorý je analogický konformnému diagramu Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery. Pre všetky prípady sme zvolili vhodné dvojrozmerné priestorupodobné nadplochy, ktoré sme vnorili do Euklidovského priestoru. Sade takýchto vnorených nadplôch sme dali interpretáciu časového vývoja čiernodierového vesmíru. V prípade Kerrovej čiernej diery sme do Euklidovského priestoru vnorili aj vonkajšiu ergosféru a horizont udalostí.

Kľúčové slova: Schwarzschildové riešenie, Reissnerové-Nordströmové riešenie, Kerrové riešenie, konformný diagram, vnorenie, kauzálna štruktúra

Title: Visualization of black hole spacetimes

Author: Michal Maixner

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This work is focused on visualisation of Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr black hole. The two-dimensional conformal diagram was constructed. In the case of Kerr black hole, the causal structure was visualized by intersection of chronological future of given point in spacetime with hypersurfaces of constant value of Boyer-Lindquist coordinate t . Conformal diagram for Kerr black hole was constructed only in the neighbourhood of outer event horizon. Then the causal diagram, which is analogous to conformal diagram for Reissner-Nordström black hole was constructed. In all cases two-dimensional spacelike hypersurfaces were chosen that were embedded into Euclidean space. The interpretation of time evolution of black hole universe was given to a sequence of such embedded hypersurfaces. In the case of Kerr black hole the embedding of outer ergosphere and outer event horizon were also constructed.

Keywords: Schwarzschild solution, Reissner-Nordström solution, Kerr solution, conformal diagram, embedding, causal structure

Obsah

Úvod	2
1 Schwarzschildovo riešenie Einsteinových rovníc	4
1.1 Dvojrozmerný konformný diagram	5
1.1.1 Zavedenie vhodných konformných súradníc	5
1.1.2 Rozšírenie variety a spojitost metriky na hraniciach oblastí	7
1.1.3 Konformný diagram	9
1.2 Vnorenie do Euklidovského priestoru	13
1.2.1 Voľba priestorupodobnej nadplochy	14
1.2.2 Vlastnosti	16
1.2.3 Interpretácia	22
2 Reissnerovo-Nordströmové riešenie Einsteinových rovníc	28
2.1 Dvojrozmerný konformný diagram	29
2.1.1 Transformácie súradníc	29
2.1.2 Rozšírenie variety a spojitost metriky	30
2.1.3 Konformný diagram	32
2.2 Vnorenie do Euklidovského priestoru	33
2.2.1 Voľba nadplochy	33
2.2.2 Vlastnosti	34
2.2.3 Interpretácia	35
3 Kerrovo riešenie Einsteinových rovníc	39
3.1 Kauzálna štruktúra V BL súradniciach	40
3.1.1 Teoretická príprava	40
3.1.2 Analýza konformnej štruktúry	44
3.2 Konformný diagram	56
3.2.1 Hľadanie nadplochy	56
3.2.2 Konformný diagram v okolí vonkajšieho horizontu udalostí	58
3.2.3 Kauzálny diagram pozdĺž krivky na nadplôchách $\theta = \text{konšt.}$	66
3.3 Vnorenie vybraných priestorupodobných nadplôch do Euklidovského priestoru	77
3.3.1 Vnorenie rotačného podpriestoru daného kauzálnym diagramom	77
3.3.2 Vnorenie ergosféry a horizontu udalostí	91
Záver	95
Zoznam použitej literatúry	98

Úvod

Jedna z najdôležitejších síl prírody, ktoré priamo vplývajú na náš každodenný život, je gravitačná sila. Univerzálnosť gravitácie spôsobuje, že gravitačné pôsobenie ľubovoľných telies sa vždy sčítava. Gravitácia sa tak vo veľkých mierkach stáva dominantnou silou a to aj napriek tomu, že sa jedná o najslabšiu známu silu prírody.

Gravitačná sila bola popísaná Isaacom Newtonom v roku 1686 v diele *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. V dnešnej dobe vieme, že presnejší popis gravitačnej interakcie je daný Einsteinovou teoriou všeobecnej relativity sformulovanou v roku 1916 Albertom Einsteinom. Jedná sa o pomerne zložitý systém nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre metriku priestoročasu.

Vzhľadom k tomu, že Newtonova gravitačná teória je popísaná omnoho jednoduchšími rovnicami a konceptmi než Einsteinova teória všeobecnej relativity, je štúdium Einsteinovej teórie dôležitá hlavne v oblasti, kde Newtonova teória zlyháva, alebo sa značne odchyľuje od reality. To nastáva okrem iného v prípade veľmi silných gravitačných polí z ktorých najtypickejším členom sú čierne diery - objekty zahalené tzv. horizontom udalostí, ktorý oddeľuje oblasti priestoročasu s výrazne odlišnou kauzálnou povahou a jedná sa o objekty s najsilnejšími gravitačnými poliami v prírode.

Čierne diery sa preslávili tým, že čokoľvek do nich spadne (tj. spadne pod vrchný horizont udalostí) už nikdy neunikne, bez ohľadu na rýchlosť jeho pohybu či výkonnosť jeho motorov. Navyše dané objekty sú nútené padať stále viac a viac k centru, až nenávratne zmiznú v centrálnej singularite, ktorá rozdrťí čokoľvek bez ohľadu na materiál objektu.

Z teoretického hľadiska sú čiernodierové riešenia častokrát tie najjednoduchšie (vďaka ich vysokej symetrii) presné analytické riešenia Einsteinových rovníc, na ktorých možno demonštrovať celú radu relativistických efektov. Jednoduchosť týchto riešení je vidieť aj z faktu, že Schwarzschildovo riešenie popisujúce sféricky symetrickú nenabitú čiernu dieru bolo prvým netriviálnym analytickým riešením Einsteinových rovníc objaveným necelé dva mesiace po ich publikovaní.

Z astrofyzikálneho hľadiska sú tieto riešenia významné tým, že predstavujú aproximáciu priestoročasu v okolí veľkého množstva skutočných vesmírnych telies akými sú hviezdy, neutrónové hviezdy, biele trpaslíky a ďalšie stacionárne telesá približne guľového tvaru. Navyše sa ukazuje, že samotné čierne diery sú prirodzenou súčasťou nášho vesmíru a častokrát završujú životnú dráhu hviezd, z ktorých sa čierna diera sformuje gravitačným kolapsom. Historicky Schwarzschildovo riešenie Einsteinových rovníc bolo po dlhú dobu jediným riešením, na ktorom sa empiricky demonštrovala lepšia prediktivita všeobecnej teórie relativity oproti Newtonovej gravitačnej teórie.

Pre uvedený význam čiernodierových riešení sa v tejto práci pokúsime vizualizovať povahu ich priestoročasu. Dôvodom je, že čiernodierové priestoročasy sú štvorrozmerné a zakryvené a nemusia byť preto jasné ako si vytvoriť nejakú intuitívnu predstavu o ich povahe. Je teda potrebné nájsť vhodné pomôcky, ktoré budú reprezentovať štvorrozmerný priestoročas pomocou rôznych diagramov s nižším počtom dimenzií.

Konkrétne sa budeme zaoberať Schwarzschildovým, Reissnerovým-Nordströmovým a Kerrovým riešením Einsteinových rovníc. Budeme sa zaujímať o kauzálnu štruktúru priestoročasu a pokúsime sa vyobraziť aké kauzálne vzťahy majú jednotlivé body v daných priestoročasocho. Taktiež sa pokúsime priestoročasy foliovať priestorupodobnými nadplochami, ktoré potom znázorníme vnorením do Euklidovského priestoru. Tieto nadplochy budú parametrizované pomocou časupodobnej súradnice, takže menením tejto časupodobnej súradnice, ktorá vyberá konkrétne vnorované priestorupodobné nadplochy, môžeme skonštruovať niečo ako vývoj čiernodierového priestoru v čase.

Kapitola 1

Schwarzschildovo riešenie Einsteinových rovníc

Najjednoduchším príkladom čiernodierového riešenia je vákuové, sféricky symetrické riešenie Einsteinových rovníc bez kozmologickej konštanty, popísané Schwarzschildovou metrikou. Toto riešenie bolo objavené v roku 1916 Karlom Schwarzschildom (Schwarzschild, 1916). V tzv. Schwarzschildových súradniciach má táto metrika tvar (Griffiths and Podolský, 2009)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.1)$$

Podľa Birkhoffovho teorému sa jedná o jedinečné vákuové sféricky symetrické riešenie, tj. každé vákuové sféricky symetrické riešenie Einsteinových rovníc (bez kozmologickej konštanty) je lokálne izometrické riešeniu (1.1). Pre popis čiernej diery sa táto metrika interpretuje pre všetky hodnoty $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$. Maximálne analyticky rozšírenú varietu však potrebujeme skonštruovať z dvoch sád týchto súradníc (Griffiths and Podolský, 2009).

Priestoročas je asymptoticky plochý, obsahuje horizont udalostí na tzv. Schwarzschildovom polomere r_s (kde majú dané súradnice singularitu) a fyzikálnu singularitu na $r = 0$, kde

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.2)$$

V ďalšom texte už budeme používať geometrizované jednotky, pre ktoré sa definuje $G \equiv c \equiv 1$.

V kapitole 1.1.1 nájdeme súradnice vhodné na popísanie celého maximálne rozšíreného priestoročasu a v kapitole 1.1.2 ukážeme, že v týchto súradniciach je metrika regulárna na horizonte udalostí pre špeciálnu voľbu voľného parametru v súradnicových transformáciach δ .

Súradnice následne využijeme v kapitole 1.1.3 na skonštruovanie konformného diagramu, v ktorom sú svetelné kužele dané priamkami zvierajúcimi s osami súradníc uhol 45° .

V kapitole 1.2 potom využijeme zavedenú časupodobú súradnicu \hat{t} na voľbu dvojrozmernej priestorupodobnej nadplochy, ktorú vnoríme do Euklidovského priestoru. Sade takto vnorených nadplôch dáme v kapitole 1.2.3 interpretáciu časového vývoja vesmíru Schwarzschildovej čiernej diery.

Pretože Schwarzschildová čierna diera je jednou z najjednoduchších riešení Einsteinových rovníc, podrobne analyzujeme závislosť výsledkov na voľných parametroch. V kapitole 1.2.2 taktiež analyzujeme možnosti vnorenia nadplochy v okolí singularity.

1.1 Dvojrozmerný konformný diagram

Pokiaľ zvolíme reprezentatívnu dvojrozmernú časupodobnú nadplochu v Schwarzschildovom priestoročase, môžeme skonštruovať dvojrozmerný konformný diagram na tejto nadploche, ktorý zobrazí celú nadplochu na obmedzenú oblasť a v ktorom budú svetelné lúče dané priamkami zvierajúcimi so súradnicovými osami 45° . Takýto konformný diagram je nazývaný taktiež Penrosov-Carterov diagram.

Na skonštruovanie diagramu potrebujeme nájsť vhodnú časupodobnú dvojrozmernú nadplochu, ktorá reprezentuje priestoročas ako celok. Vďaka sférickej symetrii Schwarzschildovej metriky sú vhodné nadplochy práve nadplochy konštantných uhlových súradníc φ a θ . Indukovaná metrika na nadplachách je

$$ds_{ind}^2 = -g_{rr}^{-1}dt^2 + g_{rr}dr^2. \quad (1.3)$$

Majúc vybrané nadplochy, na ktorých budeme diagram konštruovať, potrebujeme nájsť vhodné súradnice, v ktorých metrika (1.3) nadobudne tvar

$$ds_{ind}^2 = \Omega^2(-d\hat{\tau}^2 + d\hat{\rho}^2) \quad (1.4)$$

tak, aby súradnice $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ nadobúdali obmedzené hodnoty (Ω je ľubovoľná funkcia súradníc).

Z tohto tvaru metriky je hneď jasné, že ľubovoľná nulová krivka ležiaca na nadploche musí spĺňať rovnicu $\hat{\tau} = \pm\hat{\rho} + \hat{\tau}_0$, tj. svetelné lúče skutočne zvierajú s osami uhol 45° ako sme požadovali. Navyše metrika (1.3) nie je definovaná pre $r = r_s$ a popisuje oblasti $r \in (0, r_s)$ a $r \in (r_s, \infty)$ zvlášť. Je však známe, že tieto jednotlivé oblasti nie sú geodeticky maximálne a teda je vhodné varietu popisujúcu priestoročas maximálne rozšíriť. Z toho dôvodu kladieme na súradnice $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ požiadavok, aby metrika (1.4) bola regulárna na celej maximálne rozšírenej variete.

Rozšírenie, ako ukážeme, urobíme cez horizont udalostí a využijeme na to 4 oblasti popísané dvoma sadami Schwarzschildových súradníc, pričom využijeme dve totožné oblasti $r > r_s$ a dve totožné oblasti $r < r_s$.

1.1.1 Zavedenie vhodných konformných súradníc

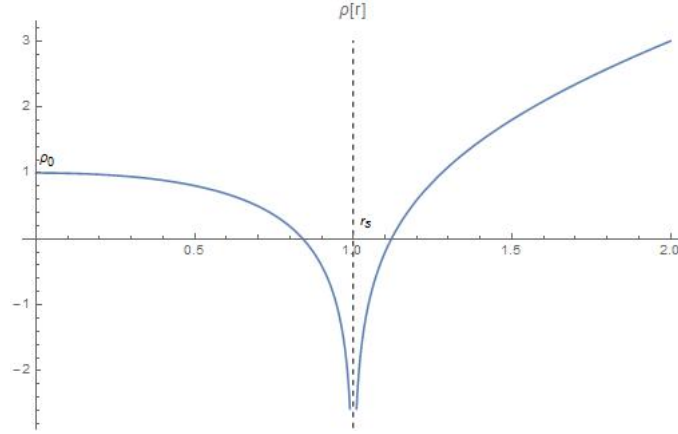
Ako sme spomínali v predošlej kapitole, na konštrukciu konformného diagramu musíme nájsť súradnice, ktoré by popísali celú rozšírenú varietu súčasne, ich definičný obor bol obmedzený a metrika bola tvaru (1.4). Nájsť vhodné súradnice sa dá v niekoľkých krokoch. Ako prvé si zavedieme tzv. korytnačiu súradnicu vzťahom

$$d\rho = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr. \quad (1.5)$$

Po integrácií pre súradnicu dostávame

$$\rho = r + r_s \ln \left| 1 - \frac{r}{r_s} \right| + \rho_0, \quad (1.6)$$

kde ρ_0 je integračná konštanta.



Obr. 1.1: Funkcia $\rho(r)$ s $\rho_0 = 1$, vyjadrené v jednotkách r_s .

Táto transformácia je hladká všade mimo $r = r_s$ a $r = 0$, je monotónna na intervaloch $(0, r_s)$, (r_s, ∞) , takže ďalej budeme predpokladať, že transformácie robíme na týchto intervaloch oddelene. V geometrizovaných jednotkách metrika (1.1) prejde do tvaru

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)} \right) (dt^2 - d\rho^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.7)$$

kde sme pomocou $r(\rho)$ označili inverznú funkciu k (1.6). Ďalej je vhodné zaviesť svetelné (Eddingtonové-Finkelsteinové) súradnice u a v , ktoré vystihujú štruktúru svetelných kuželov pomocou vzťahov

$$u = t + \rho \quad (1.8)$$

$$v = \rho - t. \quad (1.9)$$

Ďalšia vhodná transformácia (vychádza z Kruskalových-Szekeresových súradníc), ktorá napraví divergenciu metrického koeficientu g_{rr} na horizonte udalostí, obmedzí definičný obor a umožní popísanie oboch oblastí popísaných rôznymi sadami Schwarzschildových súradníc spoločne je

$$\tan \frac{\hat{u}}{2} = (-1)^m \exp \left[\frac{u}{2\delta} \right] \quad (1.10)$$

$$\tan \frac{\hat{v}}{2} = (-1)^n \exp \left[\frac{v}{2\delta} \right], \quad (1.11)$$

kde $\delta > 0$ je ľubovoľná konštanta a $m, n \in \{0, 1\}$ čísľujú jednotlivé oblasti (obr. 1.2), pre ktoré sa transformácie robia. Poslednou transformáciou prejdeme od svetelných súradníc späť k nesvetelným transformáciami

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{u} + \hat{v}}{2} \quad (1.12)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{u} - \hat{v}}{2} \quad (1.13)$$

a výsledná metrika prejde do tvaru

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r(\hat{\tau}, \hat{\rho})}\right) \frac{-4\delta^2}{\sin(\hat{\tau} + \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} - \hat{\rho})} (-d\hat{\tau}^2 + d\hat{\rho}^2) + r(\hat{\tau}, \hat{\rho})^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.14)$$

kde funkcia $r(\hat{\tau}, \hat{\rho})$ je určená implicitne transformáciami (1.8)-(1.13). Indukovaná metrika na nadplochách konštantných hodnôt uhlových súradníc je tak viditeľne v požadovanom tvare (1.4). Pri odvodzovaní sme však postupovali pre každú oblasť ($r > r_s$ a $r < r_s$) zvlášť a je potrebné ukázať, že v týchto súradniciach je varietu skutočne možné rozšíriť.

1.1.2 Rozšírenie variety a spojitosť metriky na hraniciach oblastí

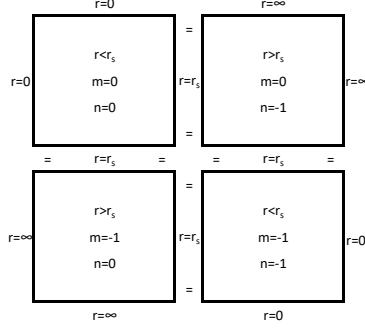
Ako už bolo napísané, je známe, že na dosiahnutie maximálne geodeticky rozšírenej variety Schwarzschildovej čiernej diery je potrebné zlepiť dokopy dve oblasti popísané dvoma sadami Schwarzschildových súradníc. V tejto podkapitole ukážeme, že toto je naozaj možné urobiť. Navyše súradnice $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ sú zavedené na oblastiach $r < r_s$ a $r > r_s$ zvlášť, takže potrebujeme zlepiť až štyri oblasti, každá s metrikou (1.14). Na zjednodušenie úlohy si priestoročas rozložíme na kartézsky súčin dvoch variet, kde jedna je popísaná súradnicami $(\hat{\tau}, \hat{\rho})$ a druhá bude varieta S^2 , popísaná uhlovými súradnicami. Keďže metrika je diagonálna, regulárnosť metriky na horizonte udalostí bude daná regulárnosťou indukovanej metriky na oboch dvojrozmerných podvarietach zvlášť. Pre nadplochy konštantných hodnôt súradníc $r, t = \text{konšt.}$ je jediná problematická funkcia v metrických koeficientov $r(\hat{\tau}, \hat{\rho})$. Túto je však potrebné vyšetriť aj pre podvarietu konštantných hodnôt uhlových súradníc. Ďalšie vyšetrovanie teda budeme robiť len pre prvú dvojrozmernú podvarietu, tj. pre nadplochy konštantných hodnôt uhlových súradníc.

Z (1.8) a (1.9) je vidieť, že súradnice u aj v nadobúdajú na každej oblasti ľubovoľné reálne hodnoty. Aby sme mohli súradnicami $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ popísať celú varietu, musíme využiť voľbu parametrov m a n , čo nám dá práve 4 kombinácie na pokrytie potrebných 4 oblastí. Ako prvé zvolíme napríklad $m = 0$ a $n = 0$ pre $r < r_s$ a $m = 0$ a $n = -1$ pre $r > r_s$, čím popíšeme jednu oblasť variety popísanú jednou sadou Schwarzschildových súradníc. Pre druhú oblasť zvolíme¹ $m = -1$ a n opačne než v prípade $m = 0$. Takto dostaneme vzájomne jednoznačné zobrazenie medzi všetkými bodmi variety a súradnicami $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ (obr.1.2).

Zaviedli sme teda súradnice na rozšírenej variete a zaujíma nás ešte analytickosť metrických koeficientov na horizontoch udalostí (hraniciach oblastí). Keďže však metrické koeficienty sú analytické všade mimo hraníc jednotlivých oblastí, stačí ukázať len hladkosť na hraniciach, tj. hladkosť funkcií

$$f_1(\hat{\tau}, \hat{\rho}) = - \left(1 - \frac{r_s}{r(\hat{\tau}, \hat{\rho})}\right) \frac{4\delta^2}{\sin(\hat{\tau} + \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} - \hat{\rho})} \quad (1.15)$$

¹Z (1.10) a (1.11) je vidieť, že pre $m = 0$ je $\hat{u} > 0$ a pre $m = -1$ je $\hat{u} < 0$ a analogicky pre parameter n a súradnicu \hat{v} . Z (1.12) a (1.13) potom vidíme, že $\hat{\tau}$ dosahuje svoje maximum pre $m = n = 0$ a minimum pre $m = n = -1$, a $\hat{\rho}$ dosahuje svoje maximum pre $m = 0$ a $n = -1$ a minimum pre $m = -1$ a $n = 0$. Voľba $m = n$ na oblasti so singularitou preto znamená, že sme zvolili súradnicu $\hat{\tau}$ časupodobnú.



Obr. 1.2: Konštrukcia maximálneho rozšírenia Schwarzschildovho priestoročasu spojením jednotlivých oblastí cez horizont udalostí.

$$f_2(\hat{\tau}, \hat{\rho}) = r^2(\hat{\tau}, \hat{\rho}). \quad (1.16)$$

Keďže $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$ sú hladké funkcie od \hat{u} a \hat{v} , stačí nám vyšetriť hladkosť funkcií

$$l_1(\hat{u}, \hat{v}) = \left(1 - \frac{r_s}{r(\hat{u}, \hat{v})}\right) \frac{1}{\sin \hat{u} \sin \hat{v}} \quad (1.17)$$

$$l_2(\hat{u}, \hat{v}) = r^2(\hat{u}, \hat{v}). \quad (1.18)$$

Z (1.6), (1.8)-(1.11) sa dá priamočiaro ukázať platnosť užitočného vzťahu

$$\left|1 - \frac{r}{r_s}\right| e^{\frac{r+\rho_0}{r_s}} = \left|\tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2}\right|^{\frac{\delta}{r_s}}, \quad (1.19)$$

použitím ktorého sa funkcia l_1 dá upraviť na tvar

$$l_1(\hat{u}, \hat{v}) = -\frac{r_s}{4r} \operatorname{sgn} \left[\left(1 - \frac{r}{r_s}\right) \hat{u} \hat{v} \right] \left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^{\frac{\delta}{r_s} - 1} \frac{e^{-\frac{r+\rho_0}{r_s}}}{\cos^2 \frac{\hat{u}}{2} \cos^2 \frac{\hat{v}}{2}} \quad (1.20)$$

a vyšetrujeme hladkosť tejto funkcie na horizonte udalostí.

Pre $r = r_s$ platí $\hat{u} = 0$, resp. $\hat{v} = 0$. Jediné problémové členy v (1.20) sú tangensy, ktoré majú na horizonte udalostí nulovú hodnotu. Pre $\delta > r_s$ tak l_1 je na horizonte udalostí nulové, pre $\delta < r_s$ naopak diverguje. Jediný prípad, kedy dostávame konečnú a nenulovú limitu $r \rightarrow r_s$, je v prípade rovnosti

$$\delta = r_s. \quad (1.21)$$

Aby funkcia l_1 bola spojitá, musí mať signum v rovnici (1.20) rovnaké znamienko na oboch oblastiach, v ktorých počítame jednostrannú limitu. Z toho dostávame podmienku, že pre $m = -1$ musíme zvoliť hodnotu n opačne než pre $m = 0$, tj. $n = -1$ pre $r < r_s$ a $n = 0$ pre $r > r_s$, tak ako sme učinili.

Ukázali sme, že pre voľby popísané v odstavci vyššie, je metrika spojitá a nedegenerovaná na hranici oblasti. Aby sme ukázali, že je aj hladká, stačí ukázať, že r je hladkou funkciou \hat{u} a \hat{v} , keďže všetky zvyšné funkcie v (1.20) hladké sú.

Keďže vieme, že na každej oblasti platí vzťah (1.19), môžeme skúmať závislosť funkcie $r(\hat{u}, \hat{v})$ pomocou neho. Navyše, keďže pravá strana rovnice je súčinom

funkcií závislej len na jednej premennej a ľavá strana závisí na \hat{u}, \hat{v} implicitne pomocou r , stačí skúmať len derivácie r podľa jednej premennej a podľa druhej premennej (alebo kombinácie oboch) bude situácia analogická. Derivovaním (1.19) podľa \hat{u} teda dostávame

$$-\frac{r}{r_s} \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) e^{\frac{r+\rho_0}{r_s}} \frac{\partial r}{\partial \hat{u}} = \left| \tan \frac{\hat{v}}{2} \right| \frac{\operatorname{sgn} \hat{u}}{2 \cos^2 \frac{\hat{u}}{2}}. \quad (1.22)$$

Pre ďalšiu deriváciu pravej strany platí

$$\frac{d}{d\hat{u}} \left[\frac{\operatorname{sgn} \hat{u}}{2 \cos^2 \frac{\hat{u}}{2}} \right] = \frac{\left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \right|}{2 \cos^2 \frac{\hat{u}}{2}}, \quad (1.23)$$

tj. vďaka pravidlu o derivovaní súčinu funkcií dostávame, že pre ľubovoľnú deriváciu (1.19) podľa \hat{u} bude na pravej strane súčet členov skladajúcich sa z násobku tangensov a prevrátenej hodnoty kosínov. Keďže však na hranici je $\hat{u} = 0$, je jasné, že na hranici dostávame konečnú hodnotu.

V ľubovoľnej derivácii na ľavej strane rovnice (1.19) zase dostaneme súčin exponenciály, signumu a lineárnej funkcie so zápornými koeficientami, tj. taktiež konečnú a nenulovú hodnotu. Všetky funkcie okrem signum sú však na hranici spojité a teda na dokázanie hladkosti už stačí len ukázať, že súčin signum funkcií definujúcich absolútne hodnoty v (1.19) je nezávislý na oblasti. To sme však zabezpečovali voľbou parametrov m, n , takže metrika je vskutku hladká.

1.1.3 Konformný diagram

Podielom, resp. vynásobením rovníc (1.10), (1.11) a dosadením rovníc (1.12), (1.13) a úpravou sa dá ukázať platnosť vzťahov

$$\cos \hat{\tau} = \frac{1 - (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho}{\delta}}}{1 + (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho}{\delta}}} \cos \hat{\rho}, \quad (1.24)$$

$$\sin \hat{\tau} = \frac{1 + (-1)^{m+n} e^{\frac{t}{\delta}}}{1 - (-1)^{m+n} e^{\frac{t}{\delta}}} \sin \hat{\rho}, \quad (1.25)$$

z ktorých je vidieť súradnicové vyjadrenie kriviek konštantných hodnôt súradníc r resp. t .

Špeciálne, horizonty udalostí sú dané úsečkami prechádzajúcimi počiatkom pod uhlom 45° od os ako je vidieť zo vzťahov (1.12)-(1.13) a faktu, že pre horizont udalostí je \hat{u} alebo \hat{v} nulové. Hranica $r \rightarrow \infty$ je daná opäť úsečkami zvierajúcimi s osami 45° , no končiace na jednom z bodov $\hat{\rho} = \pm\pi$. Obe nezávislé na voľbe parametrov ρ_0 a δ .

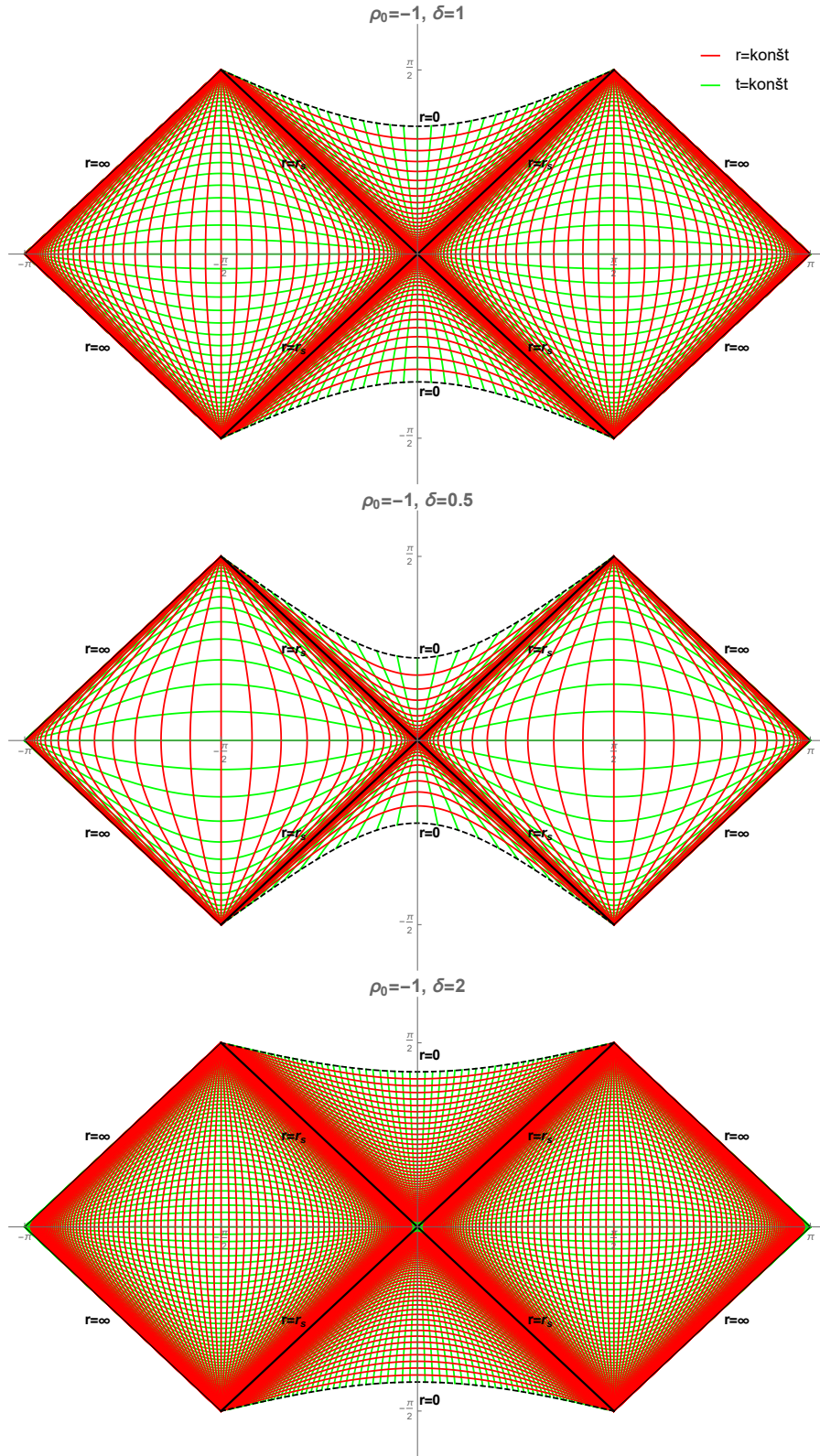
Poloha skutočnej singularity $r = 0$ v diagrame naopak závisí na voľbe parametrov ρ_0 a δ a je daná rovnicou

$$\cos \hat{\tau} = -\tanh \frac{\rho_0}{2\delta} \cos \hat{\rho}. \quad (1.26)$$

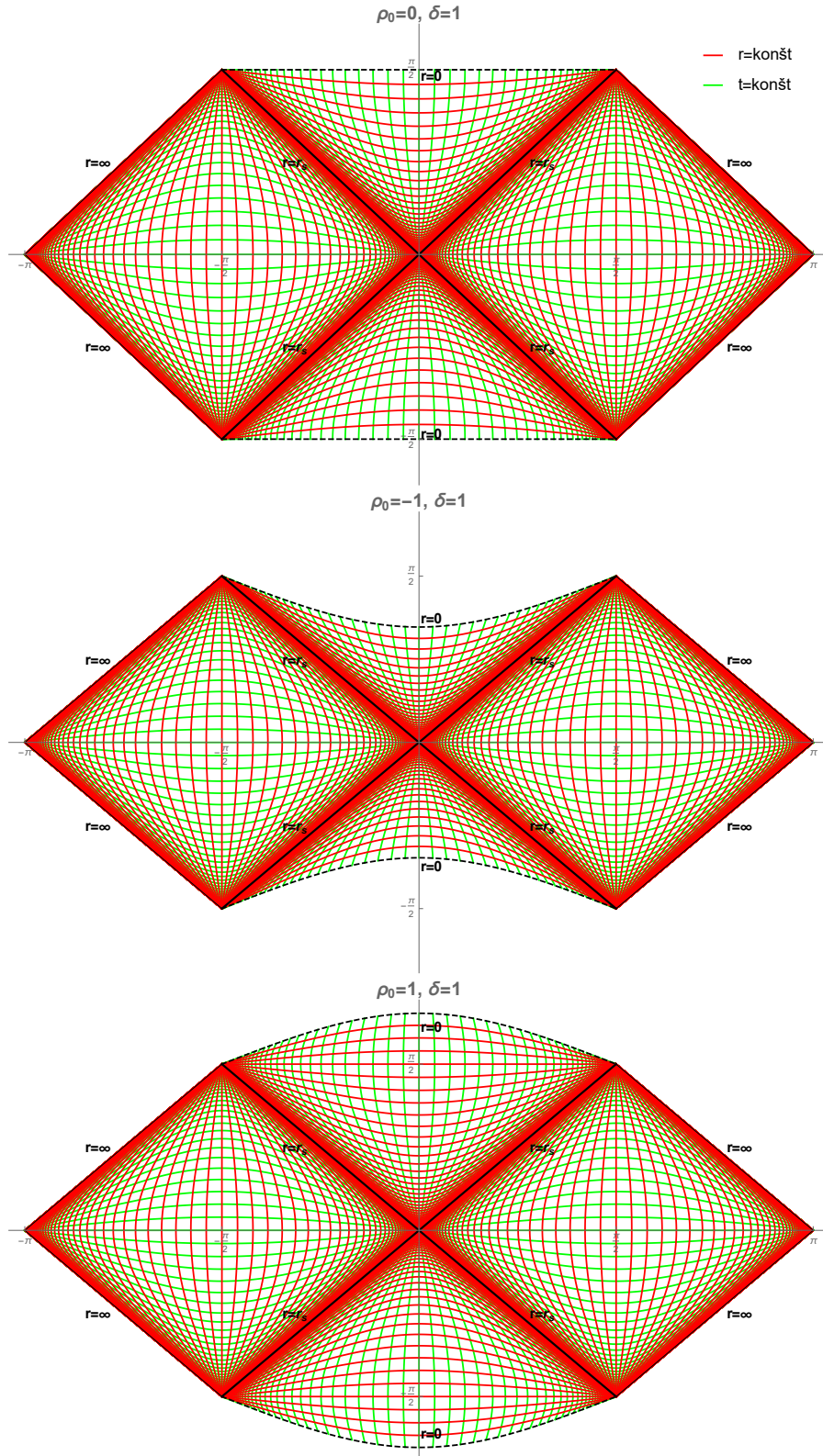
Z tej vyplýva, že pre voľbu parametra $\rho_0 > 0$ je absolútna hodnota súradnice $\hat{\tau}$ pozdĺž singularity väčšia alebo rovná $\pi/2$ a pre $\rho_0 < 0$ je menšia alebo rovná $\pi/2$. Pre $\rho_0 = 0$ je singularita daná krivkou (úsečkou) $\hat{\tau} = \pm\pi/2$.

Konformný diagram je vyobrazený pre voľbu² $\rho_0 = -1$ a $\delta \in \{0.5, 1, 2\}$ v obrázku 1.3. Z neho vidno, že parameter δ spôsobuje zahusťovanie/zreďovanie kriviek $r, t = \text{konšt.}$ Voľba parametru ρ_0 zase posúva krivky $r = \text{konšt.}$ a krivky $t = \text{konšt.}$ nemení, čo je jasné z faktu, že krivky $t = \text{konšt.}$ nezávisia na korytnačej súradnici a z faktu, že zmena integračnej konštanty posúva krivku $\rho(r)$ v obrázku 1.1 vertikálne.

²Parameter δ je síce fixovaný požiadavkom regularity metrických koeficientov, pretože však u Reissnerovej-Nordströmej čiernej diery nieje možné nájsť tento parameter pre celý priestor-čas, ponechávame ho ako voľný parameter aj u Schwarzschildovej čiernej diery.



Obr. 1.3a: Konformný diagram pre $\rho_0 = -1$ a rôzne voľby parametru δ s krivkami $\rho, t = 0.25n$ (pod horizontom udalostí nezobrazujeme krivky $r = \text{konšt.}$ pre ktoré platí $\rho > \rho_0$), kde n sú celé čísla. Horný diagram pre $\delta = 1$ zobrazuje prípad v ktorom je metrika na horizonte udalostí regulárna. Vyjadrené v jednotkách r_s .



Obr. 1.3b: Konformný diagram pre $\delta = 1$ (pre túto hodnotu je metrika na horizonte udalostí regulárna) a rôzne voľby parametru ρ_0 s krivkami $\rho, t = 0.25n$, kde n sú celé čísla. Hustota a poloha kriviek $t, r = \text{konšt.}$ sa zachováva. Vyjadrené v jednotkách r_s .

1.2 Vnorenie do Euklidovského priestoru

Na vizualizáciu krivosti priestoročasu je vhodné nejakú reprezentatívnu (pre jednoduchosť) dvojrozmernú priestorupodobnú nadplochu izometricky vnoriť do trojrozmerného Euklidovského priestoru. Keďže máme sféricky symetrický priestoročas, vhodná voľba je napríklad nadplocha $\theta = \pi/2$. Ďalej potrebujeme vybrať nejaký pojem súčasnosti, ktorý nám už konkrétne určí potrebnú nadplochu. Keďže chceme rešpektovať sférickú symetriu priestoročasu, tento pojem súčasnosti nesmie závisieť na súradnici φ , ale len na súradnici r .

Ak máme zvolenú priestorupodobnú nadplochu, môžeme pristúpiť k samotnému izometrickému vnoreniu. Hľadáme teda zobrazenie medzi zvolenou dvojrozmernou nadplochou a nejakou dvojrozmernou plochou v trojrozmernom Euklidovskom priestore tak, aby pullback indukovanej metriky na danej ploche v Euklidovskom priestore bol rovný indukovanej metrike na zvolenej nadploche v Schwarzschildovom priestoročase. V cylindrických súradniciach má Euklidova metrika známy tvar

$$ds_E^2 = dx^2 + dz^2 + x^2 d\alpha^2, \quad (1.27)$$

kde $x \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in (0, 2\pi)$. Plocha, na ktorú izometrické vnorenie zobrazuje zvolenú nadplochu zo Schwarzschildovho priestoročasu, sa dá vyjadriť vzťahom $z = z(x, \alpha)$ a indukovaná metrika na túto plochu v Euklidovskom priestore bude mať tvar

$$ds_{E_{ind}}^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 + \left[x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha^2. \quad (1.28)$$

Podobne indukovaná metrika na nadploche $(t(r), r, \varphi)$ v Schwarzschildovom priestoročase bude mať tvar

$$ds_{ind}^2 = \left[\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.29)$$

Hľadáme zobrazenie medzi danými plochami, tj. v súradniciach zobrazenie $(r, \varphi) \rightarrow (x, \alpha)$. Keďže chceme rešpektovať sférickú symetriu, chceme aby platilo $\varphi = \alpha$ a $\partial z / \partial \alpha = 0$. Po tejto voľbe už je fixované aj zobrazenie $r = x$. Použitím zobrazenia a porovnaním metrík dostaneme diferenciálnu rovnicu pre funkciu $z(r)$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2. \quad (1.30)$$

Keďže sme volili priestorupodobnú nadplochu, musí byť indukovaná metrika Riemannovská a teda ľavá strana rovnice (1.30) je vždy kladná. Pravá strana ja naopak očividne vždy väčšia 1 a teda rovnica sa nedá splniť, pokiaľ je ľavá strana menšia 1 a táto oblasť sa nedá vnoriť do Euklidovského priestoru zvoleným zobrazením.

Z intuitívneho hľadiska tento záver samozrejme nie je prekvapivý. Ak totiž interpretujeme $g_{rr} dr^2$ ako kvadrát infinitezimálnej vlastnej vzdialenosti v danom mieste pri posune o vzdialenosť dr v radiálnom smere a zároveň si zvolíme, že v Euklidovskom priestore budeme vynášať hodnoty súradnice r na jednej z osí kartézskej súradnicovej sústavy, nie je možné nájsť krivku $z(r)$, tak aby vzdialenosť pozdĺž nej (daná rovnicou $ds^2 = ((dz/dr)^2 + 1) dr^2$) bola menšia než samotné dr .

V jednej dimenzii sa dá tento problém samozrejme vyriešiť jednoducho voľbou zobrazenia $r = ax$ pre $a > 1$, kde vzdialenosť dr zobrazujeme na krivku, pozdĺž ktorej pre jej dĺžku platí $ds^2 = ((dz/dr)^2 + 1/a^2)dr^2$. Ak podobný postup použijeme pre priestor s dimenziou 2, dostaneme pre indukovanú metriku na ploche v Euklidovskom priestore vzťah

$$ds_{E_{ind}}^2 = \left[\frac{1}{a^2} + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 d\alpha^2, \quad (1.31)$$

kde sme rovno využili zobrazenie $r = ax$. Člen u $d\alpha$ však nemá potrebný tvar ako v prípade rovnice (1.29) a teda aby sme dostali izometrické vnorenie, potrebujeme ešte definovať zobrazenie $\varphi = \alpha/a$.

Toto zobrazenie však nie je možné splniť pre celý definičný obor uhlu φ , ale len do veľkosti $2\pi/a$, takže časť priestoročasu vnorená vôbec nebude. To nám však vo svojej podstate nevadí - priestoročas je sféricky symetrický a teda nijaká podstatná informácia nám neunikne. Navyše chýbajúce informácie z čiastočného zobrazenia (ako napr. obvod kružníc na konštantnom r) si možno ľahko v mysli extrapoluje.

1.2.1 Voľba priestorupodobnej nadplochy

Vzhľadom k tomu, že Schwarzschildov priestoročas obsahuje Killingové vektory $\partial/\partial t$, dáva zmysel voliť nadplochy súčasnosti požiadavkom $t = \text{konšt.}$ Takéto nadplochy však menia svoj kauzálny charakter na horizonte udalostí, tj. pod horizontom udalostí sa nadplocha stáva časupodobnou, zatiaľ čo my potrebujeme priestorupodobnú nadplochu. V asymptoticky plochej oblasti však súradnica t odpovedá vlastnému času pozorovateľa, ktorý stojí na konštantných hodnotách Schwarzschildových súradníc r , θ a φ , tj. pozorovateľa, ktorý je vzhľadom na čiernu dieru statický. Pre $r \gg r_s$ tak voľba nadplôch $t = \text{konšt.}$ dáva dobrý zmysel. Pre $r \sim r_s$ však treba zvoliť priestorupodobnú nadplochu, ktorú by sme radi vnorili do Euklidovského priestoru.

Pri konštrukcii konformného diagramu sme zaviedli časupodobnú súradnicu \hat{t} , v ktorej je kauzálna štruktúra priestoročasu vyjadrená jednoduchým spôsobom. Pod horizontom udalostí preto voľme nadplochu podmienkou $\hat{t} = \text{konšt.}$ Tieto dve nadplochy musíme nad horizontom udalostí nejakým spôsobom spojiť, najlepšie tak, aby vnorená nadplocha bola spojitá aspoň do prvej derivácie (aspoň C^1), ktorá vystupuje v rovnici (1.30), resp. (1.31).

Najjednoduchší spôsob, ako tieto dve voľby spojiť, je zaviesť nadplochu podmienkami $\hat{t} = \text{konšt.}$ pre $r < r_{max}$ a $t = \text{konšt.}$ pre $r > r_{max}$, kde r_{max} je hodnota súradnice r , pre ktorú krivky $\hat{t}(\hat{\rho})|_{t=\text{konšt.}}$ dosahujú extrém (obr. 1.4). To zabezpečí, aby nadplocha bola C^1 (nebude však C^2). Jednotlivé nadplochy potom parametrizujeme hodnotou $\hat{t}_0 \equiv \hat{t}(\hat{\rho} = 0)$.

Podielom, resp. vynásobením rovníc (1.10)-(1.11), dosadením rovníc (1.12)-(1.13) a krátkou úpravou dostaneme vzťahy

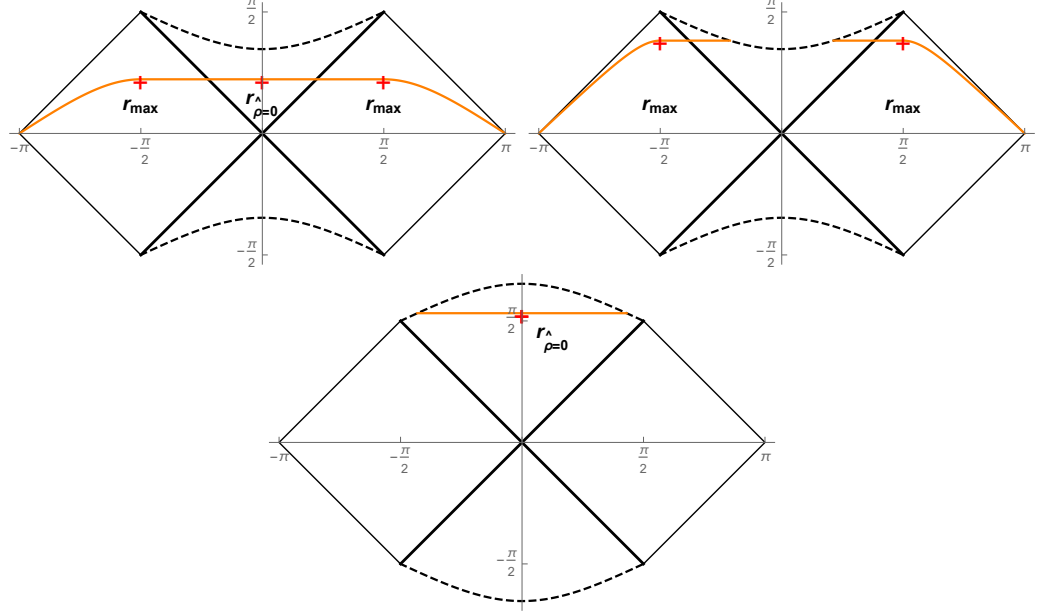
$$\rho = \delta \ln \left[(-1)^{m+n} \frac{\cos \hat{\rho} - \cos \hat{t}}{\cos \hat{t} + \cos \hat{\rho}} \right], \quad (1.32)$$

$$t = \delta \ln \left[(-1)^{m+n} \frac{\sin \hat{t} + \sin \hat{\rho}}{\sin \hat{t} - \sin \hat{\rho}} \right]. \quad (1.33)$$

Z rovnice (1.25) vidíme, že pre ľubovoľné, ale fixné t nastáva maximum pre $|\hat{\rho}| = \pi/2$. Pre r_{max} potom dostaneme rovnicu

$$\rho(r_{max}) = 0, \quad (1.34)$$

čoho riešenie hľadáme pre $r > r_s$ (v prípade $\rho_0 > 0$ a $\hat{\tau} > \pi/2$, resp. $\hat{\tau} < -\pi/2$ je celá nadplocha pod horizontom udalostí a teda táto nadplocha nebude obsahovať časť s $t = \text{konšt.}$).



Obr. 1.4: Vnorovaná krivka $\hat{\tau}(\hat{\rho})$ (oranžová) a hodnoty r_{max} a $r_{\hat{\rho}=0}$, pre $\rho_0 < 0$ hore, pre $\rho_0 > 0$ dole.

Voľbou $\hat{\tau} = \text{konšt.}$ však vo všeobecnosti na nadploche súradnica r nenadobúda všetkých hodnôt $r > 0$ (obr. 1.4). Pre $-\pi/2 < \hat{\tau}_0 < \pi/2$ bude existovať minimálna hodnota súradnice r , ktorú označíme $r_{\hat{\rho}=0}$. V prípade, že krivka $\hat{\tau}(\hat{\rho})$ nezasahuje do singularity, bude tento parameter daný podmienkou $\hat{\rho} = 0$ (obr. 1.4 vľavo hore), inak sa bude nadplocha skladať z dvoch oddelených častí a $r_{\hat{\rho}=0} = 0$ (obr. 1.4 vpravo hore). V prípade $\hat{\tau}_0 > \pi/2$, resp. $\hat{\tau}_0 < -\pi/2$ (čo môže nastať len v prípade $\rho_0 > 0$), bude existovať maximálna hodnota súradnice r , ktorú opäť označíme $r_{\hat{\rho}=0}$ a ktorá bude daná rovnakou podmienkou $\hat{\rho} = 0$ (obr. 1.4 dole), ktorá vedie na rovnicu:

$$\rho(r_{\hat{\rho}=0}) = \delta \ln \left[\frac{1 - \cos \hat{\tau}_0}{1 + \cos \hat{\tau}_0} \right]. \quad (1.35)$$

Krivka $\hat{\tau} = \text{konšt.}$ končí v singularite pre

$$\cos \hat{\tau}_0 \leq -\tanh \frac{\rho_0}{2\delta}. \quad (1.36)$$

Vyjadrením $\hat{\rho}$ z (1.32), dosadením do (1.33) a následným dosadením ρ z (1.6) získame závislosť súradnice t na r pre krivku $\hat{\tau} = \text{konšt.}$ potrebnú pre výpočet $z(r)$ rovnicou (1.30). Pre dĺžku rovnice však uvedieme len vzťah

$$\sin \hat{\rho} = \text{sgn } \hat{\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{1 + (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho}{\delta}}}{1 - (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho}{\delta}}} \cos \hat{\tau} \right)^2} \quad (1.37)$$

a zvyšok je otázkou dosadenia závislosti korytnačej súradnice ρ na r a dosadením (1.37) do (1.33). Po zderivovaní $t(r)$ a dosadením do (1.30) a úpravou môžeme písať diferenciálnu rovnicu

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r < r_{max}} = \frac{r}{r - r_s} \left[1 - \frac{(1 + h(r))^2}{(1 - h(r))^2 - (1 + h(r))^2 \cos^2 \hat{\tau}_0} \sin^2 \hat{\tau}_0 \right] - 1, \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r > r_{max}} = \frac{r_s}{r - r_s}, \quad (1.39)$$

kde

$$h(r) = (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho(r)}{\delta}} = (-1)^{m+n} \left| 1 - \frac{r}{r_s} \right|^{\frac{r_s}{\delta}} e^{\frac{r+\rho_0}{\delta}}, \quad (1.40)$$

príp.

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r < r_{max}} = \frac{r}{r - r_s} \left[1 - \frac{(1 + h(r))^2}{(1 - h(r))^2 - (1 + h(r))^2 \cos^2 \hat{\tau}_0} \sin^2 \hat{\tau}_0 \right] - \frac{1}{a^2}, \quad (1.41)$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r > r_{max}} = \frac{r}{r - r_s} - \frac{1}{a^2} \quad (1.42)$$

pre voľbu zobrazenia $r = ax$, kde $a > 1$.

1.2.2 Vlastnosti

Vnorená nadplocha je vyobrazená pre hodnotu parametru $\rho_0 = 1$, $\delta = 1$ a rôzne hodnoty $\hat{\tau}_0 \geq 0$ v obrázkoch 1.5. Rast parametru $\hat{\tau}_0$ možno v istom zmysle chápať ako časový vývoj priestoročasu. Potom pre $r > r_{max}$ sa, pokiaľ interpretujeme parameter $\hat{\tau}_0$ týmto spôsobom, vesmír s časom nevyvíja, ako je vidieť z rovnice (1.40) určujúcej tvar vnorenej nadplochy. To je ostatne jasné z faktu, že na tejto oblasti volíme nadplochy $t = \text{konšt.}$ a z faktu, že súradnica t je ignorovateľná, tj. že priestoročas je pre $r > r_s$ statický v súradnici t .

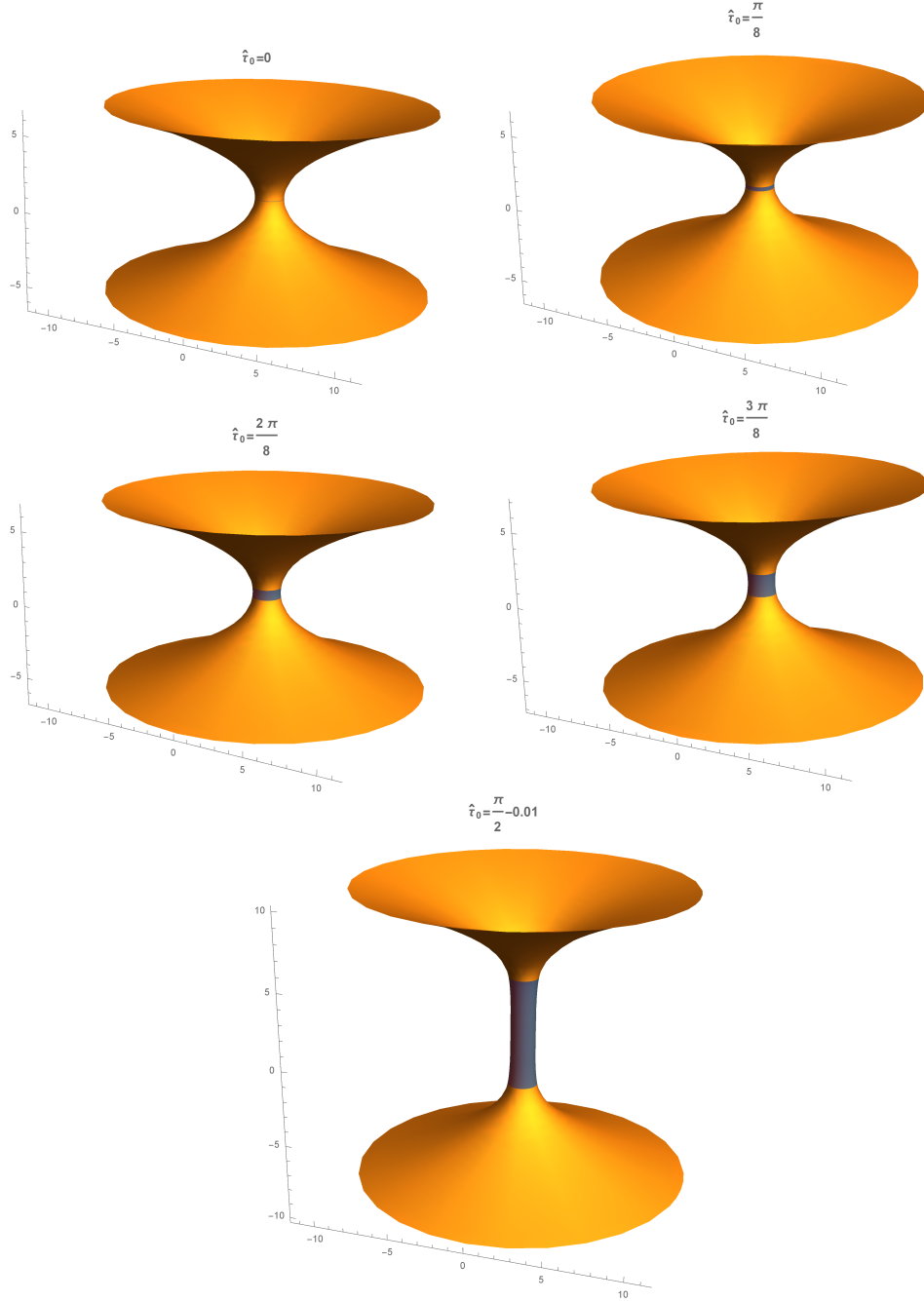
Rovnicu (1.40) môžeme navyše priamo zintegrovat

$$z = 2\sqrt{r_s} \sqrt{r - r_s} \quad (1.43)$$

a vnorená nadplocha má na oblasti $r > r_{max}$ tvar elyptického paraboloidu s rovnakými poloosami. Pre $r \rightarrow \infty$ tak dostávame asymptotiku $r \sim 2\sqrt{r_s r}$, ktorá môže byť trochu prekvapivá. Schwarzschildov priestoročas je totiž asymptoticky plochý a tak by sa mohlo naivne očakávať, že pre veľké hodnoty r by malo platiť $z \sim \text{konšt.}$

Oblasť $r < r_{max}$ sa už však s časom (parametrom $\hat{\tau}_0$) vyvíja. Z obrázku 1.5a je vidieť, že s rastúcim kladným časom (rastúcim $\hat{\tau}_0 > 0$) sa hrdlo spájajúce paralelné vesmíry postupne rozširuje. Rovnaká situácia nastáva pre $\hat{\tau}_0 \leq 0$ a klesajúcu hodnotu $\hat{\tau}_0$, čo vyplýva z toho, že rovnica (1.39) je invariantá pri transformácií $\hat{\tau}_0 \rightarrow -\hat{\tau}_0$. Pre $\hat{\tau}_0 \rightarrow \pi/2$ zľava a $r < r_s$ dostaneme z (1.38)

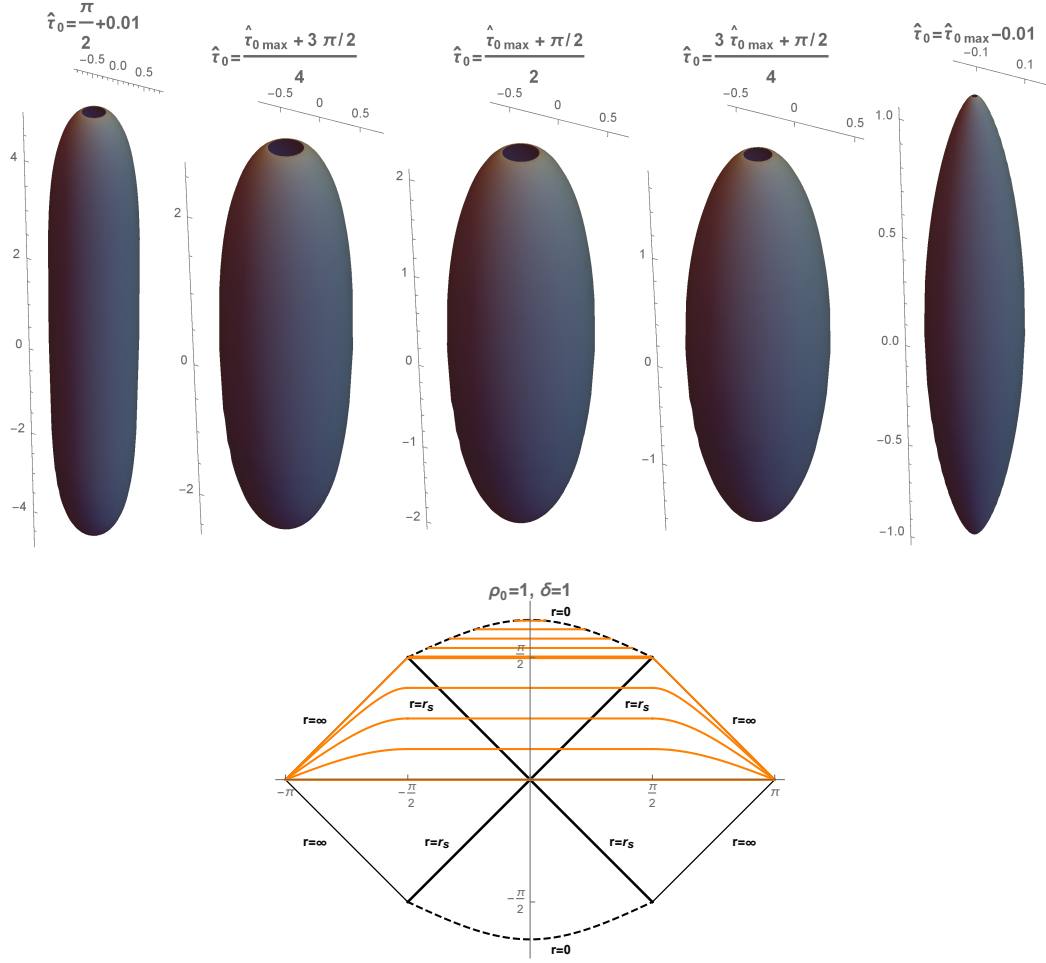
$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{r_s}{r - r_s} - \frac{r}{r - r_s} \tanh^{-2} \left(-\frac{\rho}{2\delta} \right) + O \left(\left(\frac{\pi}{2} - \hat{\tau}_0 \right)^2 \right). \quad (1.44)$$



Obr. 1.5a: Vnorovaná nadplocha pre $\rho_0 = 1$, $\delta = 1$, kedy je metrika regulárna a rôzne $\hat{\tau}_0$. Oblasť pod horizontom udalostí je zobrazená sivou farbou. Konformný diagram s vyznačenými vnorovanými nadplochami je v obr. 1.5b dole. Vyjadrené v jednotkách r_s .

Pre $r \rightarrow r_s$ a $\rho_0 > 0$ platí $\tanh(-\rho/(2\delta)) \rightarrow 1$, z čoho vyplýva že integrál (1.44) na okolí horizontu udalostí je obmedzený. Keďže na vnorovanej nadploche $\rho \neq 0$, je jasné, že hrdlo spájajúce paralelné vesmíry bude vždy konečné.

Vplyv parametru δ na dĺžku hrdla, resp. tvaru vnorenej nadplochy pre $r < r_{max}$, je vyobrazný v obrázku 1.9. Z neho vidieť, že rast parametru δ za predpokladu fixovaných hodnôt ρ_0 a $\hat{\tau}_0$ zapríčiňuje predlžovanie hrdla. Navyše, ako sme ukázali v kapitole 1.1.2, sú metrické koeficienty regulárne na horizonte udalostí



Obr. 1.5b: Hranica vnorených plôch neodpovedá singularitám, ale len hranici, do ktorej je možné plochy zvoleným zobrazením vnoriť. Dole je vykreslený konformný diagram a v ňom zobrazené vnorované krivky $\hat{\tau}(\hat{\rho})$.

len pre voľbu parametru $\delta = 1$. To možno vidieť z obrázku 1.6, kde je vyobrazená závislosť funkcie $(dz/dr)^2$ na r pre hodnoty parametru $\delta \in \{0.5, 1, 2\}$. Z obrázku je hneď vidieť, že pre $\delta > 1$ platí $\lim_{r \rightarrow r_s} (dz/dr)^2 = \infty$ a pre $\delta < 1$ platí $\lim_{r \rightarrow r_s} (dz/dr)^2 = -1$ a v tomto prípade blízke okolie horizontu udalostí vnoriť nejde. O správnosti tvrdenia sa môžeme ešte presvedčiť spočítaním limity rovnice (1.41). Použitím L'Hopitalova pravidla a po úprave dostaneme

$$\lim_{r \rightarrow r_s^+} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{-4r_s}{\sin^2 \hat{\tau}} \lim_{r \rightarrow r_s^+} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{a^2}. \quad (1.45)$$

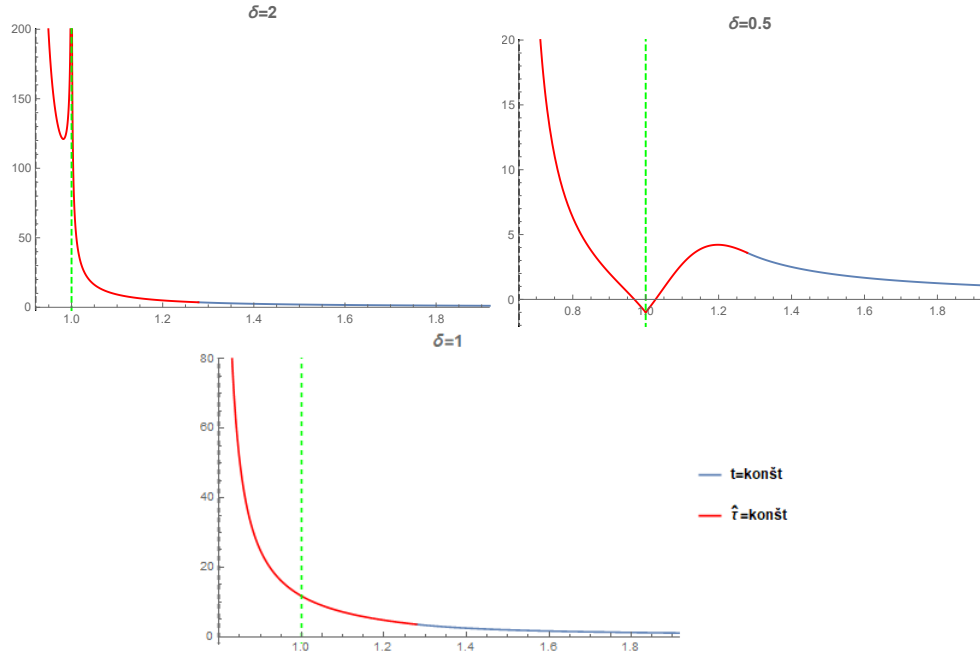
Pre ľubovoľné r platí

$$\frac{dh}{dr} = \frac{(-1)^{m+n}}{\delta} \left[\left| 1 - \frac{r}{r_s} \right|^{\frac{r_s}{\delta}} - \left| 1 - \frac{r}{r_s} \right|^{\frac{r_s}{\delta}-1} \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) \right] e^{\frac{r+\rho_0}{\delta}}. \quad (1.46)$$

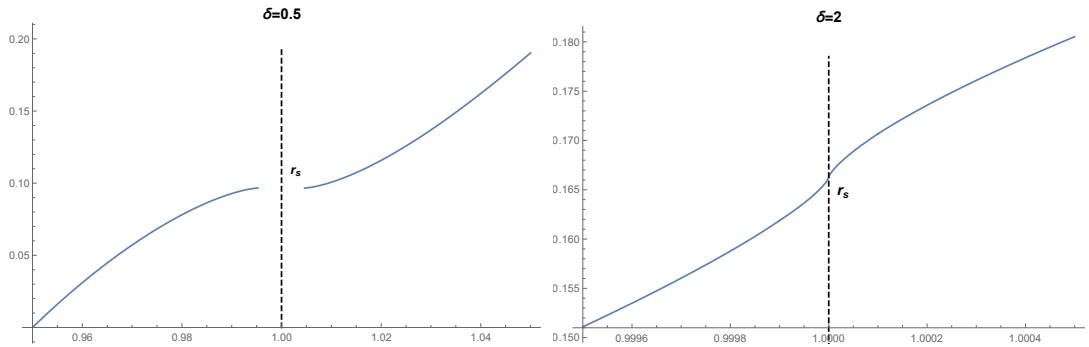
Keďže $\delta > 0$, pre (1.45) platí

$$\lim_{r \rightarrow r_s} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{4r_s}{\delta \sin^2 \hat{\tau}_0} e^{\frac{r_s+\rho_0}{\delta}} \lim_{r \rightarrow r_s} \left| 1 - \frac{r}{r_s} \right|^{\frac{r_s}{\delta}-1} - \frac{1}{a^2}, \quad (1.47)$$

kde limita absolútnej hodnoty je 1 pre $\delta = r_s$, 0 pre $\delta < r_s$ (takže okolie r_s sa nedá vnoriť, obrázok 1.7 vľavo) a pre $\delta > r_s$ diverguje (takže vnorená plocha zvierá s osou r uhol 90° , obrázok 1.7 vpravo).



Obr. 1.6: Závislosť $(dz/dr)^2$ na r pre $\rho_0 = 0$, $\hat{\tau}_0 = 3\pi/8$ a rôzne hodnoty δ . Hodnota $\delta = 1$ odpovedá regulárnej metrike. Vyjadrené v jednotkách r_s .



Obr. 1.7: Funkcia $z(r)$ na okolí horizontu udalostí pre hodnoty parametrov $\rho_0 = 1$, $\hat{\tau}_0 = \pi/2 - 0.01$, $\delta = 0.5$ (vľavo) a $\delta = 2$ (vpravo), vyjadrené v jednotkách r_s . Pre $\hat{\tau}_0$ dostatočne rôzne od nuly dostanem v súradnici $\epsilon = r - r_s$ pre $\delta > r_s$ $z(\epsilon) \sim \text{sgn } \epsilon |\epsilon|^{(r_s+\delta)/2\delta}$ a na horizonte udalostí je derivácia funkcie nekonečná. Pre prípad $\delta = 2r_s$ vyobrazený v obrázku vpravo, dostávame mocniteľa o hodnote $3/4$. Mocniteľ klesá na $1/2$ v limite $\delta \rightarrow \infty$.

Vplyv parametru ρ_0 na krivosť vnorovaných nadploch pre $|\hat{\tau}_0| < \pi/2$ možno porovnať použitím obrázkov 1.5, 1.10 a 1.11. Hlavný rozdiel medzi vnorenými nadplochami spôsobuje vplyv singularity, tj. najväčší rozdiel medzi vnorenými nadplochami nastáva, pokiaľ vnorovaná krivka v diagrame prechádza v blízkosti singularity, resp. končí v singularite. Pre $\rho_0 = 0$ sa krivka v diagrame s $\hat{\tau}_0 \rightarrow \pi/2$ čoraz viac singulárity blíži a hrdlo sa čoraz viac predlžuje a zužuje. Pre $\hat{\tau}_0$ veľmi

blízke $\pi/2$ je $r_{\hat{\rho}=0}$ veľmi blízke 0 a môžeme rovnicu (1.44) rozvinúť v okolí $r = 0$. Pre korytnačiu súradnicu dostaneme

$$\rho = -\frac{r^2}{2r_s} + O(r^3) \quad (1.48)$$

a teda vedúca závislosť v (1.44) bude

$$(dz/dr)^2 \sim \frac{r_s}{r - r_s} \left(1 - \frac{16\delta^2 r_s^2}{r^3} \right), \quad (1.49)$$

čo znamená, že dĺžka hrdla v tomto prípade diverguje.

Pre $\rho_0 < 0$ existuje istá hodnota $\hat{\tau}_0$, ktorú označíme $\hat{\tau}_{sing}$, daná nerovnicou (1.36), pre ktorú sa vnorovaná krivka v diagrame práve dotkne singularity (obr. 1.10). Dosadením (1.36) do (1.41) pre $\delta \neq r_s$ môžeme spočítať limitu

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = -\frac{\delta}{\delta - r_s} \coth \frac{\rho_0}{2\delta} - \frac{1}{a} \quad (1.50)$$

a v prípade, že pravá strana (1.50) je kladná, vnorenie možno urobiť pre všetky hodnoty $r > 0$. To je mimo iné možné len pokiaľ platí $\delta > r_s$. Konečnosť pravej strany (1.50) znamená, že uhol sklonu krivky $z(r)$ v $r \rightarrow 0$ voči súradnicovej osi r je menšia než 90° .

Pre $\delta = r_s$ dostávame limitu

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \infty \quad (1.51)$$

a v tomto prípade vnorenie taktiež možno urobiť pre všetky hodnoty $r > 0$ a vnorená nadplocha bude mať sklon v $r \rightarrow 0$ osou r 90° (obr. 1.10).

Pre $\hat{\tau}_0$ spĺňajúce v nerovnici (1.36) ostrú nerovnosť dá limita (1.41) výsledok

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = -\frac{1}{a^2} \quad (1.52)$$

a teda pre žiadnu voľbu parametru a sa nedá vnorenie urobiť až po singularitu.

Vzhľadom k tomu, že nadplocha $\hat{\tau}_0 = \hat{\tau}_{sing} > 0$ aj nadplochy $\hat{\tau}_0 > \hat{\tau}_{sing} > 0$ končia v singularite a prvú nadplochu je možné vnoriť, zatiaľ čo zvyšné nie, môžeme sa pokúsiť nájsť triedu nadplôch daných funkciou $t(r)$, pre ktoré sa vnorenie urobiť dá

$$ds_{ind}^2 = \left[g_{tt} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + g_{rr} \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (1.53)$$

kde ds_{ind}^2 značí metriku indukovanú na nadploche danej funkciou $t(r)$. Aby bolo vnorenie možné urobiť, musí byť metrický koeficient v hranatej zátvorke ostro väčší nule - v tom prípade totiž možno nájsť parameter a tak, aby platilo $(dz/dr)^2 \geq 0$. V blízkosti singularity tak dostávame podmienku

$$0 < \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r_s - r}{r} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 - \frac{r}{r_s - r} \right]. \quad (1.54)$$

Limita druhého člena je nula, takže aby sme dostali kladnú limitu, musí platiť

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r_s}{r} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 \right]. \quad (1.55)$$

Z definície limity dostávame, že pre danú krivku $t(r)$ existuje kladná konštanta b taká, že na nejakom okolí singularity platí³

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)^2 > br. \quad (1.56)$$

Zatiaľ čo podmienka na priestorupodobnosť má tvar

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)^2 > -\frac{g_{rr}}{g_{tt}} = \left(\frac{r}{r-r_s} \right)^2 \approx \left(\frac{r}{r_s} \right)^2. \quad (1.57)$$

Čo je pre r blízke nule slabšia podmienka než (1.56).

Opačným prístupom, kedy si zvolíme pevnú hodnotu konštanty b , dostávame množinu funkcií, pre ktoré na nejakom okolí singularity (ale rovnakom pre všetky) platí vzťah (1.51).⁴ Ak podmienku dosadíme do indukovanej metriky (1.54) na nejakom blízkom okolí singularity dostaneme

$$g_{tt} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + g_{rr} > b(r_s - r) - \frac{r}{r_s - r}. \quad (1.58)$$

Z toho vidno, že limita $r \rightarrow 0$ je vskutku kladná a nenulová, keďže táto limita pravej strany nerovnosti (1.59) dá hodnotu $br_s > 0$.

Výsledky možno interpretovať nasledovne: Keďže súradnica r je pod horizontom udalostí časupodobná, na dosiahnutie priestorupodobnosti musíme vybočiť zo smeru r do smeru t podľa podmienky (1.57). Aby však vnorenie bolo možné až po singulartu, je potrebné toto vybočenie zväčšiť tak, aby v nejakom okolí singularity platilo (1.56), pre nejakú hodnotu $b > 0$.⁵

³Keby limita (1.55) divergovala, z definície automaticky dostávame, že existuje nejaká oblasť a konštanta K , kde platí $(dt/dr)^2 > Kr$. V prípade, že limita nediverguje môžeme pre konkrétnu voľbu krivky označiť limitu ako $c_{t(r)}$. Potom z definície limity musí platiť

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall r \in (0, \delta); \left| \frac{r_s}{r} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 - c_{t(r)} \right| < \varepsilon,$$

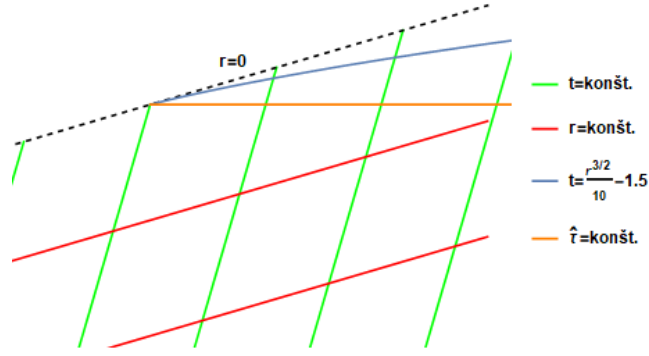
tj. na nejakom intervale platí pre ľubovoľné r

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)^2 > \frac{c_{t(r)}}{2} \frac{r}{r_s}.$$

⁴Táto množina samozrejme neobsahuje všetky krivky, ktoré sa dajú vnoriť, pretože pre ľubovoľnú hodnotu b nemáme zahrnuté napr. krivky pre ktoré platí

$$\frac{b}{r} > \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 > \frac{b}{2} r.$$

⁵Pokiaľ by platila na nejakom okolí opačná rovnosť pre ľubovoľnú hodnotu b , nebude podmienka (1.56) očividne splnená



Obr. 1.8: Porovnanie krivky $\hat{t} = \text{konšt.}$ s krivkou $t = r^{3/2}/10 - 1.5$ v okolí singularity pre $\rho_0 = 0$, $\delta = 1$. Vyjadrené v jednotkách r_s .

V našom prípade nadplochy s konštantnou hodnotou súradnice \hat{t} ide na nadploche funkcia $(dt/dr)^2$ do singularity ako r^2 , takže nemožnosť vnorenia takejto nadplochy podmienka (1.56) potvrdzuje. Navyše, pokiaľ $\hat{t}_0 = \hat{t}_{sing}$, vedúci člen na nadploche $\hat{t} = \text{konšt.}$ je závislý na r , tak ako to predpovedala naša analýza.

Ak si v konformnom diagrame prezrieme tvar kriviek konštantného t a r , skutočnosť, že podmienka (1.56) zväčšuje vybočenie do smeru t znamená, že oproti našej krivke by sme potrebovali krivku, ktorá sa v okolí singularity lepšie adaptuje na jej tvar (obr. 1.8).

Ostáva sa pozrieť na prípad $\rho_0 > 0$ a $|\hat{t}| > \pi/2$ (obr. 1.5b). V tomto prípade parameter \hat{t}_0 môže nadobúdať hodnoty z intervalu $(-t_{0max}, t_{0max})$, kde t_{0max} je dané rovnicou (1.36). Pre vnorované nadplochy platí $r < r_s$ a tieto vždy končia na singularite. S rastúcim časom $\hat{t}_0 > \pi/2$ sa znižuje ich zdanlivá veľkosť v konformnom diagrame a rovnako sa znižuje aj veľkosť ich vnorených plôch. Aj v tomto prípade, podobne ako tomu bolo pre $|\hat{t}| < \pi/2$, rast parametru δ spôsobuje predlžovanie jednotlivých vnorených plôch. Zároveň si možno všimnúť, že rast tohto parametru znižuje hodnotu r , do ktorej možno vnorenie v okolí singularity urobiť.

1.2.3 Interpretácia

Vnorované priestorupodobné nadplochy sme parametrizovali časupodobnou súradnicou \hat{t}_0 . Celý časopriestor máme foliovaný pomocou týchto nadplôch a môžeme tak chápať jednotlivé nadplochy ako rez čiernodierového priestoročasu v danom čase. Spojitú zmenu parametru \hat{t}_0 potom možno interpretovať ako plynutie času vo vesmíre a zmena konkrétneho tvaru vnorených nadplôch ako vývoj samotného čiernodierového vesmíru s časom.

Pri tejto interpretácii presný tvar a vývoj vesmíru s čiernou dierou záleží na voľbe parametrov ρ_0 a δ , ktoré vyberajú konkrétne foliovanie priestoročasu. Kvalitatívne možno foliovanie rozdeliť na 3 hlavné kategórie pre $\rho_0 < 0$, $\rho_0 = 0$ a $\rho_0 > 0$.

Pre $\rho_0 < 0$ (obr. 1.10) vesmír začína pre $\hat{t}_0 = -\pi/2$. Pre túto hodnau dostá-

vame pre vnorováciu funkciu z

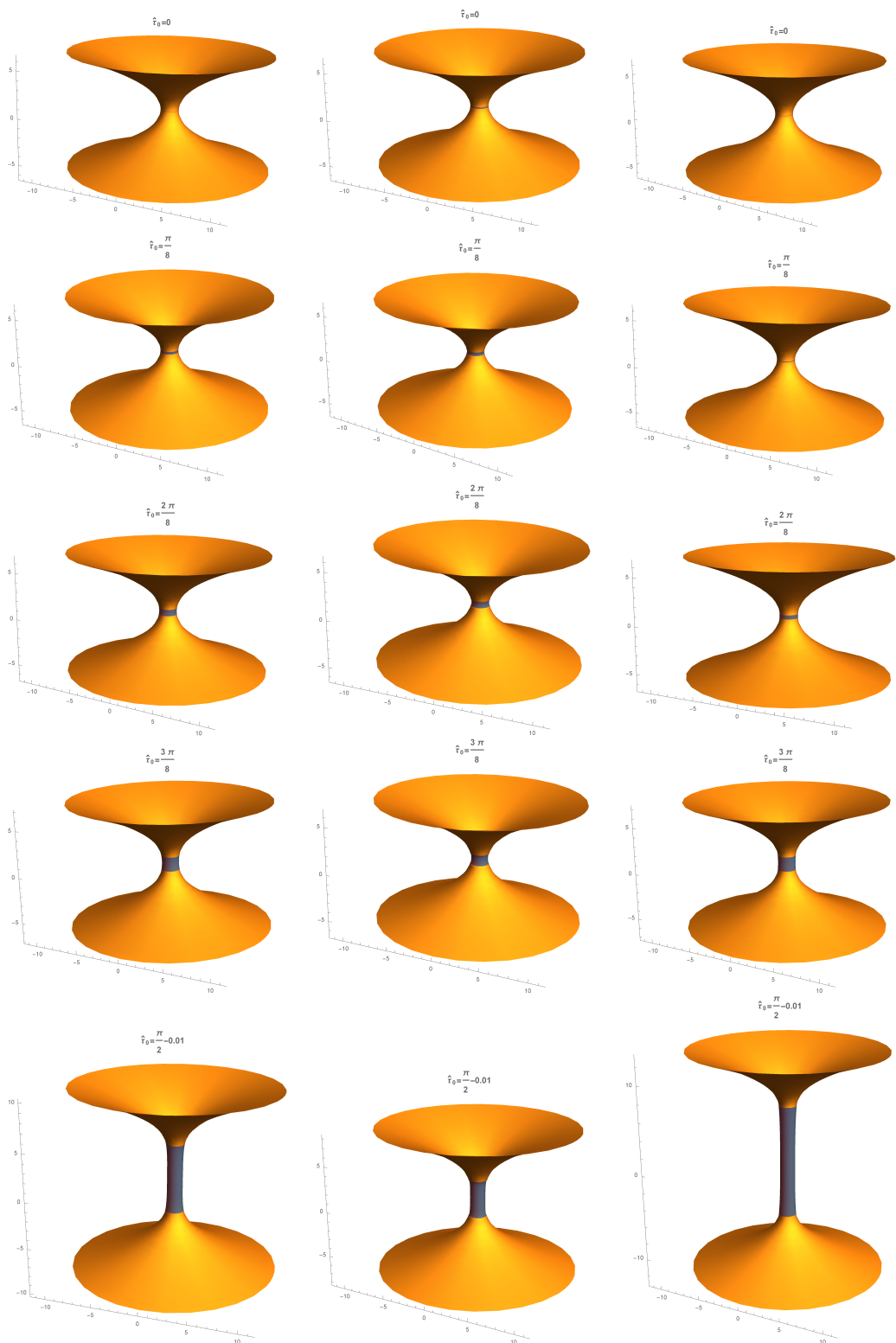
$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r < r_{max}} = \frac{r}{r - r_s} \frac{-4h(r)}{(1 - h(r))^2} - 1 \quad (1.59)$$

a aj napriek tomu, že interval $r \in (0, r_{max})$ je znazornený v konformnom diagrame pre $\hat{\tau}_0 = -\pi/2$ ako jeden bod, je vidieť, že táto degenerácia na vnorenej nadploche nenastáva. Celý priestoročas sa tak skladá z dvoch paralelných, oddelených vesmírov, ktoré končia na singularite (vnorenie však, ako sme spomínali, nie je možné až po singularitu urobiť). S plynúcim časom sa hrdlo vesmírov natahuje, až sa oba paralelné vesmíry spoja a vznikne medzi nimi Einsteinov-Rosenov most. Hrdlo sa postupne rozširuje a zmenšuje až do hodnoty $\hat{\tau}_0 = 0$, kedy sa vývoj obráti a hrdlo sa začne zužovať a natahovať až sa opäť roztrhne. Tento proces však nastáva tak rýchlo, že nijaký časupodobný pozorovateľ nim nestihne do paralelného vesmíru preletieť, čo je ostatne jasné z konformného diagramu.

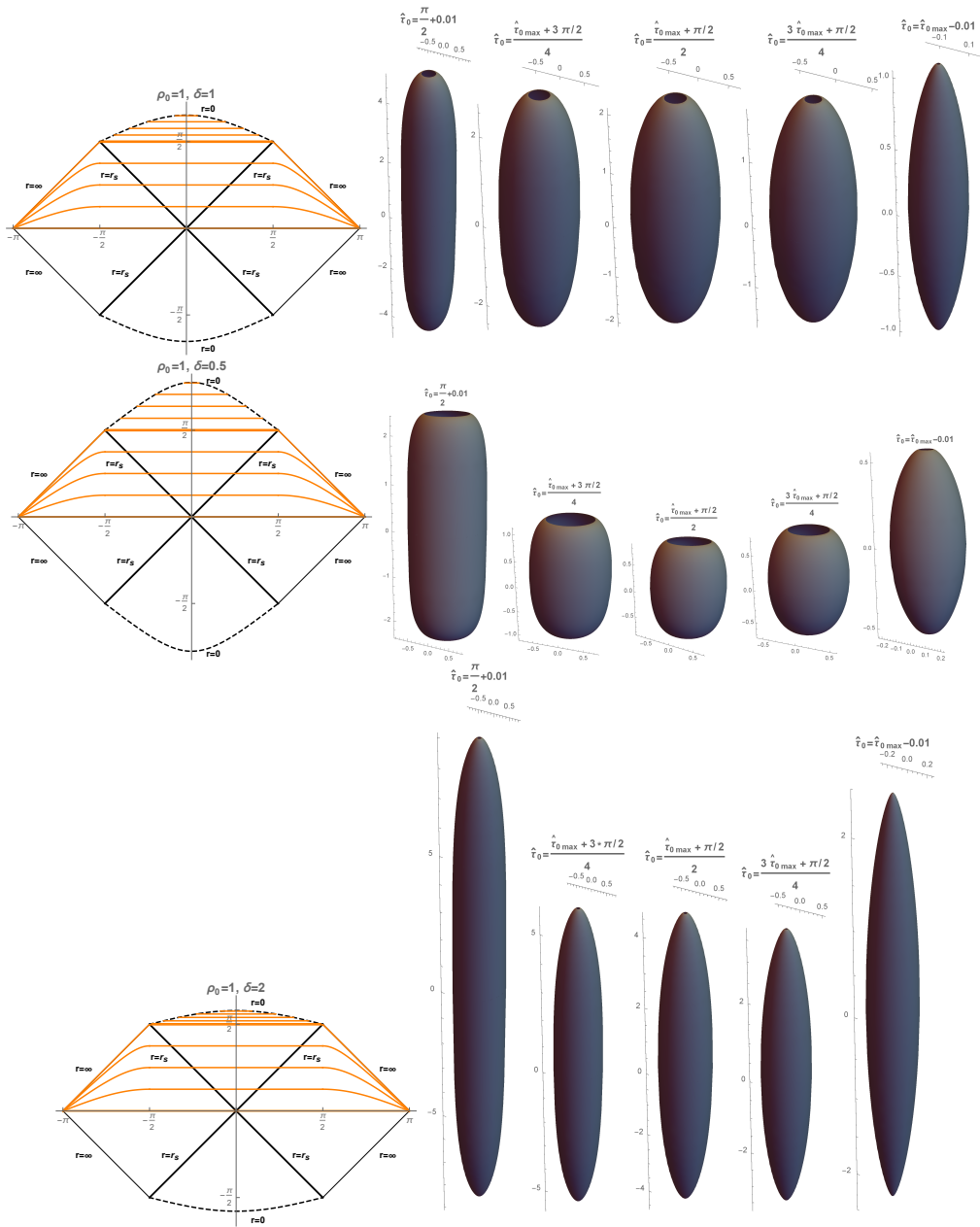
V prípade $\rho_0 = 0$ (obr. 1.10) sú paralelné vesmíry neustále spojené Einsteinovým-Rosenovým mostom. V limite $\hat{\tau}_0 = \pm\pi/2$ je tento most nekonečne dlhý, ako sme ukázali rovnicou (1.49). S plynúcim časom sa hrdlo podobne ako pre $\rho_0 < 0$ rozširuje a zmenšuje až do hodnoty $\hat{\tau}_0 = 0$, kedy sa vývoj obráti.

V prípade $\rho_0 > 0$ (obr. 1.5) začína vesmír v čase $\hat{\tau}_0 < -\pi/2$ ako bublina ohraničená singularitami (vnorenie však nemožno až po singularitu urobiť) s hodnotami súradnice $r < r_{\hat{\rho}=0}$. Bublina sa ďalej natahuje, až v čase $\hat{\tau}_0 = \pi/2$ sa z nej otvoria dva paralelné vesmíry s asymptoticky plochými oblasťami, spojené Einsteinovým-Rosenovým mostom. Ten sa ďalej rozširuje a zmenšuje až do času $\hat{\tau}_0 = 0$, kedy sa vývoj opäť obráti.

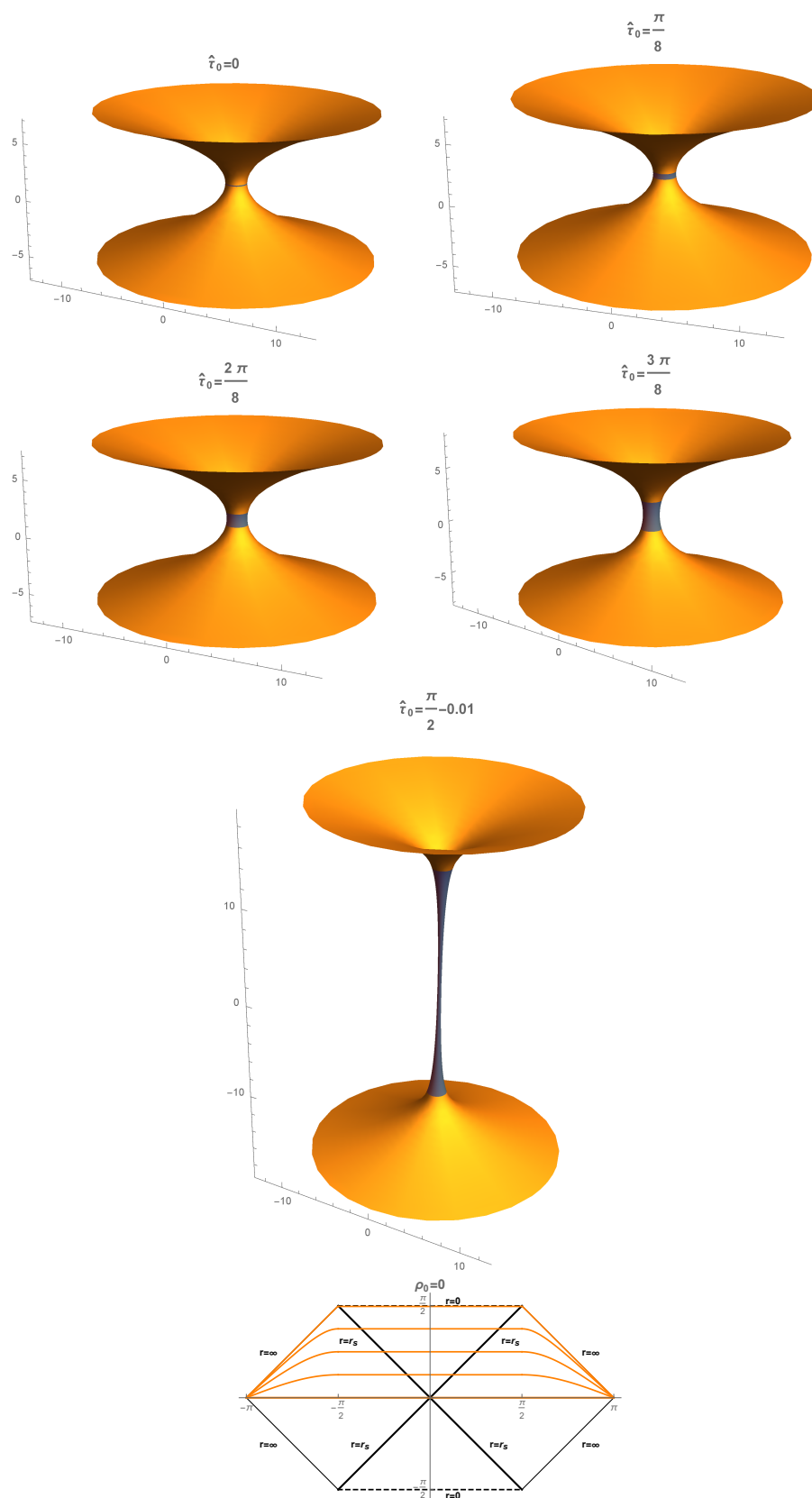
Vo všetkých prípadoch je pre $r > r_{max}$ vnorovaná nadplocha totožná s nadplochou konštantnej hodnoty ignorovateľnej súradnice t , odpovedajúcej (na tejto oblasti) časupodobnému kilingovému vektorovému poľu $\partial/\partial t$, takže táto oblasť sa v čase nevyvíja. Celá dynamika čiernodierového vesmíru tak nastáva len na oblasti $r < r_{max}$.



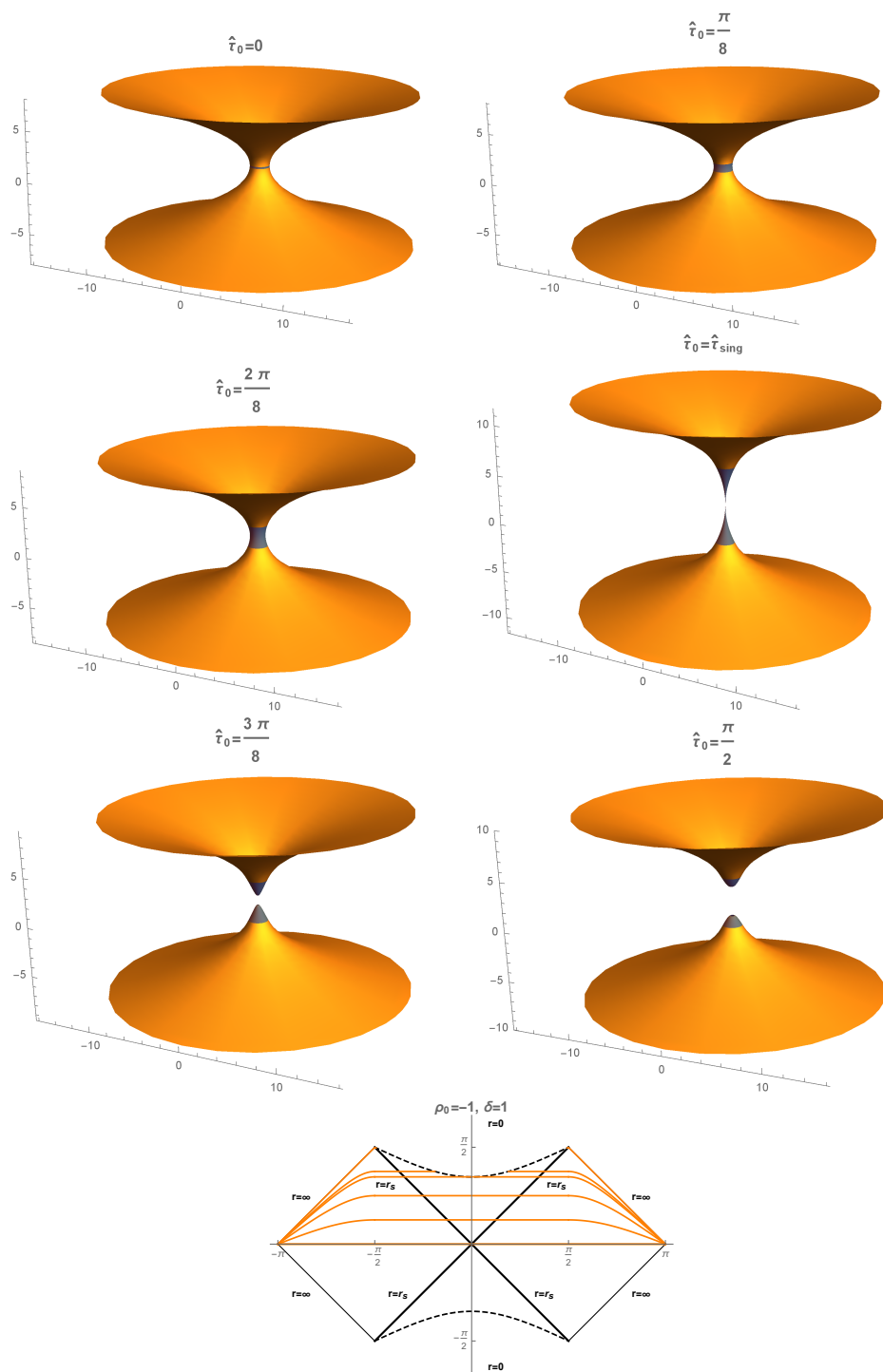
Obr. 1.9a: Porovnanie vnorených nadploch pre $\rho_0 = 1$, pre $\delta = 1$ (vľavo), $\delta = 0.5$ (v strede), $\delta = 2$ (vpravo) a rôzne hodnoty $\hat{\tau}_0$. Konformné diagramy s vyznačenými vnorovanými nadplochami sú uvedené v obr. 1.9b.



Obr. 1.9b: Pokračovanie obrázku 1.6, tentokrát grafy s rovnakou hodnotou parametru δ sa nachádzajú v jednom riadku. Vľavom stĺpci sa nachádzajú konformné diagramy spoločne s krivkami s danou hodnotou $\hat{\tau}_0$. Hranica vnorenej plochy neodpovedá singularite.



Obr. 1.10: Vnorená nadplocha pre $\rho_0 = 0$, $\delta = 1$ a rôzne \hat{t}_0 . Oblasť pod horizontom udalostí zobrazená sivou farbou.



Obr. 1.11: Vnorovaná nadplocha pre $\rho_0 = -1$, $\delta = 1$ a rôzne $\hat{\tau}_0$. Oblasť pod horizontom udalostí zobrazená sivou farbou.

Kapitola 2

Reissnerovo-Nordströmovo riešenie Einsteinových rovníc

Krátko po objave Schwarzschildovho riešenia bolo objavené riešenie pre sféricky symetrickú čiernu dieru s elektromagnetickým poľom, nezávisle Hansom Reissnerom (Reissner, 1916), Hermannom Weylom (Weyl, 1917) a Gunnarom Nordströmom (Nordström, 1918), nazývané Reissnerove-Norströmove riešenie. V súradniciach Scharzschildovho typu a geometrizovaných jednotkách sa dá metrika vyjadriť v tvare (Griffiths and Podolský, 2009)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1)$$

Priestoročas obsahuje elektromagnetické pole $F = dA$, s vektorovým potenciálom

$$A = -\frac{Q}{r} dt, \quad (2.2)$$

kde parametre M a Q majú interpretáciu hmotnosti a náboja zdroja. Podobne ako v Schwarzschildovom priestoročase sa pre popis čiernej diery metrika interpretuje pre hodnoty súradníc $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t \in \mathbb{R}$. Geodeticky maximálnu varietu je však potrebné zostrojiť z viacerých oblastí popísaných týmito súradnicami podobne, ako tomu bolo u Schwarzschildovej čiernej diery.

Priestoročas je opäť asymptoticky plochý pre $r \rightarrow \infty$, pre prípad $M > Q$ obsahuje na rozdiel od Schwarzschildovej čiernej diery dva horizonty udalostí na $r = r_+$ a $r = r_-$ (tzv. vonkajší a vnútorný horizont), kde

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (2.3)$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (2.4)$$

Priestoročas taktiež obsahuje fyzikálnu singularitu na $r = 0$.

V prípade, kedy $Q > M$, priestoročas obsahuje nahú singularitu a teda nepopisuje čiernodierové riešenie. Pokiaľ $Q = M$, vonkajší a vnútorný horizont splynú v jeden a dostaneme extrémnu čiernu dieru. Týmito prípadmi sa v tejto práci nebudeme zaoberať.

Podobne ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery, zavedieme v kapitole 2.1.1 súradnice vhodné na popis maximálne rozšíreného priestoročasu. V kapitole 2.1.2 ukážeme, že pre špeciálnu hodnotu voľného parametru δ bude

v nových súradniciach metrika regulárna na horizonte udalostí. Tentokrát však dostaneme dve rôzne hodnoty pre dva rôzne horizonty udalostí a tak naše súradnice neodstraňujú súradnicovú singularitu na oboch horizontoch súčasne. Podľa hodnoty voľného parametru δ však bude možné odstrániť túto singularitu na vybranom horizonte udalostí.

V kapitole 2.1.3 skonštruujeme použitím zavedených súradníc konformný diagram na nadplochách konštantných hodnôt uhlových súradníc.

Časupodobnú súradnicu $\hat{\tau}$ potom podobne ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery využijeme v kapitole 2.2.1 na voľbu vhodných dvojrozmerných priestorupodobných nadplôch, ktoré vnoríme do Euklidovského priestoru. Sade takýchto vnorených nadplôch potom opäť dáme v kapitole 2.2.3 interpretáciu časového vývoja vesmíru Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery.

2.1 Dvojrozmerný konformný diagram

2.1.1 Transformácie súradníc

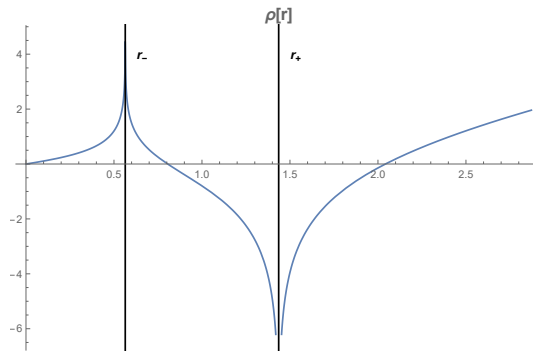
Podobne ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery je potrebné na skonštruovanie konformného diagramu nájsť vhodné súradnice. Postup na ich nájdenie je plne analogický postupu, ktorý sme použili u Schwarzschildovho riešenia Einsteinových rovníc. Najskôr zavedieme korytnačiu súradnicu vzťahom (obr. 2.1)

$$d\rho = g_{rr}dr = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr = \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)} dr. \quad (2.5)$$

Po integrácii

$$\rho = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| 1 - \frac{r}{r_-} \right| + \rho_0, \quad (2.6)$$

kde ρ_0 je integračná konštanta a transformácia je monotónna a spojitá zvlášť na intervaloch $(0, r_-)$, (r_-, r_+) , (r_+, ∞) , takže ďalej budeme predpokladať, že všetky transformácie robíme na každom intervale zvlášť.



Obr. 2.1: Korytnačia súradnica pre $q = 0.9$, $\rho_0 = 0$. Vyjadrené v jednotkách m .

Ďalší postup je totožný postupu z kapitoly 1.1.1, tj. zavádzame nové súradnice pomocou vzťahov (1.8)-(1.13), až nakoniec dostaneme metriku do tvaru

$$ds^2 = \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2} \frac{-4\delta}{\sin(\hat{\tau} + \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} - \hat{\rho})} (-d\hat{\tau}^2 + d\hat{\rho}^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.7)$$

kde r je funkciou $\hat{\tau}$ a $\hat{\rho}$.

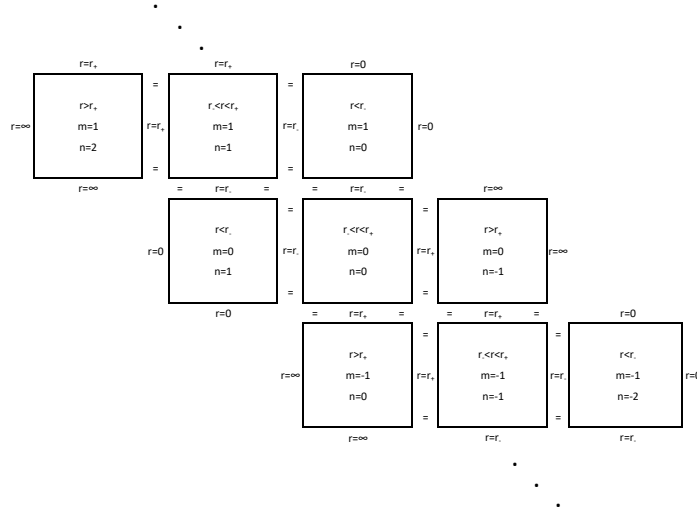
2.1.2 Rozšírenie variety a spojitosť metriky

Súradnice \hat{r} a $\hat{\rho}$ a metriku (2.7) sme zaviedli zvlášť na oblastiach definovaných intervalmi $(0, r_-)$, (r_-, r_+) , (r_+, ∞) . Tieto tri typy oblastí teraz musíme podobne ako v prípade Schwarzschildovho riešenia spojiť dokopy tak, aby súradnice boli spojité a jednoznačné, metrika hladká a regulárna a varieta geodeticky maximálna. Na rozdiel od Schwarzschildovej čiernej diery, kde nám na pokrytie celej maximálne rozšírenej variety stačili štyri voľby parametrov m a n , budeme u Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery potrebovať viac možností (m a n sú však stále celočíselné). To sa dá dosiahnuť rozšírením definičného oboru súradníc \hat{u} , \hat{v} . Parametre m a n budú aj naďalej číslovať jednotlivé oblasti, a to nasledovným spôsobom:

$$\hat{u} = 2 \arctan \left[(-1)^m e^{\frac{u}{2\delta}} \right] + 2\pi \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \quad (2.8)$$

$$\hat{v} = 2 \arctan \left[(-1)^n e^{\frac{v}{2\delta}} \right] + 2\pi \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad (2.9)$$

kde obor hodnôt funkcie arkus tangens je tradične $(-\pi/2, \pi/2)$ a zátvorky $\lfloor \rfloor$ značia celočíselné zaokrúhlenie nadol. Výsledná štruktúra maximálneho rozšírenia je potom daná obrázkom 2.2.



Obr. 2.2: Konštrukcia maximálneho rozšírenia Reissnerovho-Nordströmovho priestoročasu spojením jednotlivých oblastí cez horizonty udalostí.

Ako z obrázku vidno, bez ohľadu na počet nalepených blokov, horizont udalostí vždy ostane na hranici priestoročasu a tak geodeticky maximálnu varietu je možné dosiahnuť jedine nekonečným počtom blokov, prípadne zmenou topológie.

Majúc zavedené súradnice pre celú maximálne rozšírenú varietu vzťahmi (2.8) a (2.9) ukážme hladkosť a nenulovosť metrických koeficientov na horizontoch udalostí, tj. ukážme hladkosť a nenulovosť funkcií

$$f_1(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{(r(\hat{u}, \hat{v}) - r_-)(r(\hat{u}, \hat{v}) - r_+)}{r(\hat{u}, \hat{v})^2} \frac{1}{\sin \hat{u} \sin \hat{v}}, \quad (2.10)$$

$$f_2(\hat{u}, \hat{v}) = r^2(\hat{u}, \hat{v}). \quad (2.11)$$

Rovnako ako v prípade Schwarzschildovho riešenia sa dá odvodiť analóg vzťahu (1.19)

$$\left| 1 - \frac{r}{r_+} \right|^{\frac{r_+^2}{r_+ - r_-}} \left| 1 - \frac{r}{r_-} \right|^{\frac{r_-^2}{r_+ - r_-}} e^{r+\rho_0} = \left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^\delta, \quad (2.12)$$

použitím ktorého môžeme upraviť (2.10)

$$\begin{aligned} f_1(\hat{u}, \hat{v}) = & \frac{r_+}{r} \frac{r_-}{r} \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right|^{\frac{r_+^2}{r_+^2} - 1} e^{-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}(r+\rho_0)} \frac{\left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^{\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \delta - 1}}{4 \cos^2 \frac{\hat{u}}{2} \cos^2 \frac{\hat{v}}{2}} \times \\ & \times \operatorname{sgn} \left[\tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

príp. (súčin tangensov v signume sme nahradili ich znamienkom)

$$\begin{aligned} f_1(\hat{u}, \hat{v}) = & \frac{r_+}{r} \frac{r_-}{r} \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right|^{\frac{r_+^2}{r_+^2} + 1} e^{\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}(r+\rho_0)} \left(\cos \frac{\hat{u}}{2} \cos \frac{\hat{v}}{2} \right)^{\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \delta - 1} \times \\ & \times \left(\sin \frac{\hat{u}}{2} \sin \frac{\hat{v}}{2} \right)^{-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} \delta - 1} \operatorname{sgn} \left[(-1)^{m+n} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde oba vzťahy určite platia všade mimo horizonty udalostí a singularitu. Na vonkajšom horizonte udalostí je \hat{u} alebo \hat{v} rovné celočíselným násobkom 2π , takže aby metrický koeficient bol nenulový a konečný na tomto horizonte musí z (2.13) platiť

$$\delta = \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \equiv \delta_+. \quad (2.15)$$

Naopak pre vnútorný horizont z (2.14) dostaneme

$$\delta = \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \equiv \delta_-, \quad (2.16)$$

takže je jasné, že metrické koeficienty nebudú hladké a nenulové na celom priestoročase, ale podľa voľby parametru δ môžu byť hladké a nenulové len na jednom z horizontov udalostí.

Na popísanie celej variety teda potrebujeme dve sady súradnicových máp Schwarzschildovho typu, jednu pre $r < r_+$ a druhú pre $r > r_-$, dané vzťahmi (2.15)-(2.16). Podobne ako pri Schwarzschildovom riešení, aby signum z rovníc (2.13)-(2.14) nemenil pri prechode medzi oblasťami hodnotu, je potreba zvoliť parametre m a n tak, aby hodnota $(-1)^{m+n}$ bola na rovnakých typoch oblastí rovnaká tak, ako sme to urobili v obrázku 2.2.

Ukázanie hladkosti metriky je esenciálne totožné postupu, ktorý sme už robili v kapitole 1.1.2, takže ho nebudeme podrobne rozpisovať, ale uvedieme len jednotlivé kroky, ktoré vedú k výsledku.

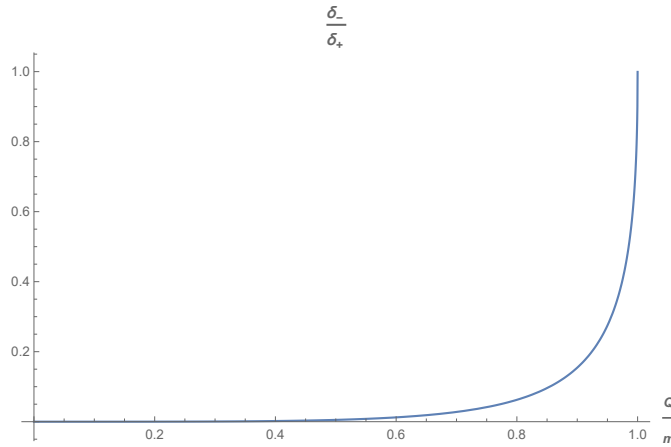
Na vonkajšom horizonte udalostí zvolíme parameter δ podľa (2.15), dosadíme do rovnice (2.12) a odmocníme ním. Následne derivujeme úplne analogicky ako

v kapitole 1.1.2 a rovnako ako tomu bolo v tejto kapitole, môžeme ukázať hladkosť jednotlivých derivácií.

Pre vnútorný horizont je potrebné zvoliť parameter δ podľa (2.16) a rovnicu (2.12) sa tentokrát oplatí odmocniť zápornou hodnotou δ , aby sme dostali člen $1 - r/r_-$ v prvej mocnine. Po substitúcii $k \rightarrow \hat{u} - \pi$ a $l \rightarrow \hat{v} - \pi$ navyše pravá strana prejde na presne ten istý tvar ako v kapitole 1.1.2 s vnútorným horizontom udalostí na rovnakej hodnote súradnice k alebo l , takže analýzu opäť možno použiť.

2.1.3 Konformný diagram

Konformný diagram je vykreslený v obrázku (2.4) pre $\rho_0 = m$ $Q = 0.9m$ a $\delta \in \{\delta_+, \delta_-\}$. Krivky $r = \text{konšt.}$ a $t = \text{konšt.}$ sú naďalej dané rovnicami (1.24) a (1.25), takže oblasti $r > r_+$ sú v diagrame kvalitatívne rovnaké ako tomu bolo u Schwarzschildovho riešenia. To isté platí pre oblasti $r_- < r < r_+$, ktoré sú kvalitatívne podobné oblastiam $r < r_s$ v limite $\rho_0 \rightarrow \infty$ u Schwarzschildového riešenia s tým rozdielom, že táto oblasť nekončí na singularite, ale na vnútornom horizonte udalostí. Hlavný rozdiel oproti Schwarzschildovej čiernej diere je v oblasti $r < r_-$, kde krivky $r = \text{konšt.}$ sú časupodobné podobne ako na oblasti $r > r_+$, tj. na rozdiel od Shwarzschildovej čiernej diery má singularita časupodobnú povahu. To súvisí aj s rozdielnou topológiou konformného diagramu pre Reissnerovú-Nordströmovú čiernu dieru, kde je možné prejsť oblasťou $r < r_+$ do iného vesmíru, tj. znovu do (inej) oblasti $r > r_+$.

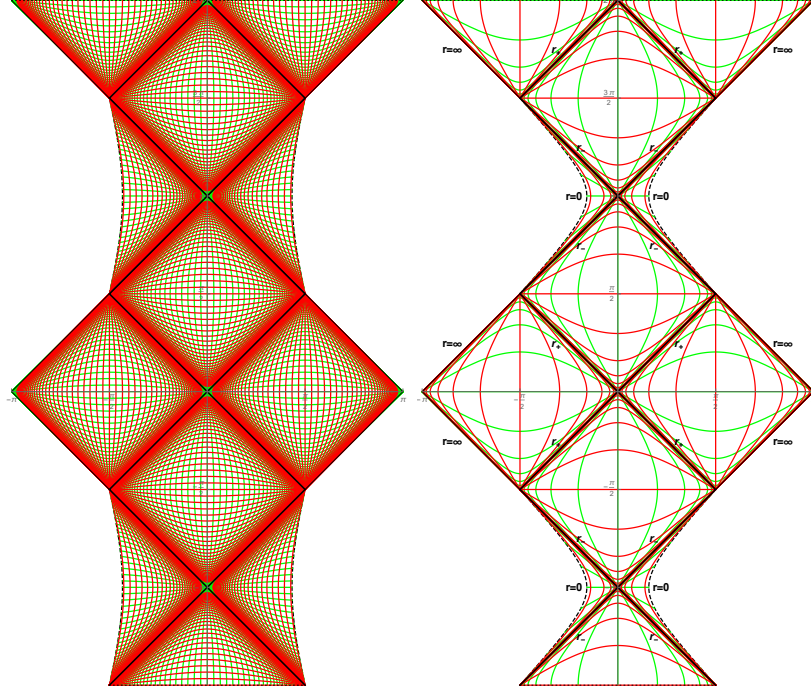


Obr. 2.3: Závislosť δ_-/δ_+ na Q/m .

Pozrime sa ešte na pomer hodnôt δ_-/δ_+ ako funkciu Q/m :

$$\frac{\delta_-}{\delta_+} = \frac{r_-^2}{r_+^2}, \quad (2.17)$$

ktorá rastie z 0 pre $Q/m = 0$ do 1 pre $Q/m \rightarrow 1$ a ktorá je vyobrazená v obrázku 2.3. Z neho vidieť veľmi ostrú závislosť v blízkosti $Q/m = 1$, zatiaľ čo táto závislosť pre $Q/m \lesssim 0.9$ je pomerne malá a hodnoty δ_-/δ_+ sú nízke.



Obr. 2.4: Konformné diagramy pre $Q = 0.9m$, $\rho_0 = m$, $\delta = \delta_+ \simeq 2.365m$ (vľavo), $\delta = \delta_- \simeq 0.365m$ (vpravo).

2.2 Vnorenie do Euklidovského priestoru

Reissnerovo-Nordströmovo riešenie je podobne ako Schwarzschildovo riešenie sféricky symetrické, s veľmi podobným tvarom metriky, takže väčšina diskusie z kapitol 1.2 a 1.2.1 tu ostáva rovnaká. Rovnica (1.29) pre vnorovaciú funkciu $z(r)$ bude mať tentokrát tvar (pre ľubovoľnú hodnotu parametru $a > 1$, definujúci zobrazenie $r = ax$ do Euklidovského priestoru)

$$\frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)} - \frac{(r - r_-)(r - r_+)}{r^2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2. \quad (2.18)$$

2.2.1 Voľba nadplochy

Zvolíme podobnú nadplochu ako sme volili pre Schwarzschildovo riešenie, tj. $t = \text{konšt.}$ pre $r > r_{max}$ a $\hat{t} = \text{konšt.}$ pre $r < r_{max}$ a nadplochy parametrizujeme opäť hodnotou $\hat{t} \equiv \hat{t}_0$ v oblasti $r < r_{max}$. Keďže rovnice (1.32)-(1.33) platia aj pre Reissnerovú-Nordströmovu čiernu dieru, zavedieme r_{max} rovnicou (1.34) vyriešenou pre oblasť $r > r_+$.

Rovnako potrebujeme zaviesť parameter $r_{\hat{\rho}=0}$ vzťahom (1.35), ktorý nám udáva minimum (pre $\pi/2 > \hat{t}_0 > -\pi/2$), resp. maximum (pre $\pi > \hat{t}_0 > \pi/2$) hodnoty súradnice r na nadploche. Na rozdiel od Schwarzschildovho priestoročasu však táto hodnota nikdy nebude nulová, keďže v Reissnerovom-Nordströmovom riešení neexistujú nadplochy volené podľa uvedených podmienok, ktoré by prechádzali asymptoticky plochou oblasťou a končili na singularite a to pre žiadnu voľbu parametru ρ_0 .

Vzťah pre $dt/d\rho$ ako funkcia korytnačej súradnice je rovnaká ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery a na nájdenie obdoby rovníc (1.40)-(1.42) stačí urobiť len minimálne úpravy:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r < r_{max}} = \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)} \times \left[1 - \frac{(1+h(r))^2}{(1-h(r))^2 - (1+h(r))^2 \cos^2 \hat{\tau}} \sin^2 \hat{\tau} \right] - \frac{1}{a^2}, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \Big|_{r > r_{max}} = \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)} - \frac{1}{a^2}, \quad (2.20)$$

$$h(r) = (-1)^{m+n} e^{\frac{\rho(r)}{\delta}} = (-1)^{m+n} \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right|^{\frac{r_+^2}{\delta(r_+ - r_-)}} \left| 1 - \frac{r}{r_-} \right|^{-\frac{r_-^2}{\delta(r_+ - r_-)}} e^{\frac{r+\rho_0}{\delta}}. \quad (2.21)$$

2.2.2 Vlastnosti

Rovnicu (2.20) nie je ľahké priamo zintegrovat'. Postačí nám však analýza asymptotického správania. Pre $r \gg r_+$ a $a = 1$ dostávame

$$z(r) \approx \int \sqrt{\frac{r_+ + r_-}{r}} dr = 2\sqrt{(r_+ + r_-)r} + z_0, \quad (2.22)$$

kde z_0 je integračná konštanta. Pre dostatočne veľké hodnoty súradnice r je teda rovnako ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery vnorená nadplocha (takmer) parabolou.

Z obrázkov 2.5 potom vidieť, že vnorené nadplochy sú veľmi podobné tým zo Schwarzschildovho riešenia a to hlavne v prípade Schwarzschildovho riešenia, kde volíme $\rho_0 > 0$, tj. prípadu, kedy sa singularita v konformnom diagrame nenachádza na hodnotách $|\hat{\tau}| < \pi/2$. Podobne ako v tomto prípade môžeme preskúmať správanie funkcie $(dz/dr)^2$ na okolí vonkajšieho horizontu udalostí.

Pre úsek $r_+ < r < r_{max}$ je $m+n$ nepárne číslo, súradnica ρ nadobúda monotónne hodnoty z intervalu $(-\infty, 0)$, takže funkcia $h(r) \in (-1, 0)$ a je monotónna a klesajúca s r a teda prvý člen je na danom úseku kladný s limitou sprava pre $r \rightarrow r_+$

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{-4}{\sin^2 \hat{\tau}} \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{a^2}, \quad (2.23)$$

kde sme použili l'Hospitalove pravidlo. Ďalej platí

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{dh}{dr} = \frac{-r_+}{\delta(r_+ - r_-)} \left(\frac{r_+}{r_-} - 1 \right)^{\frac{-r_-^2}{\delta(r_+ - r_-)}} e^{\frac{r_+ + \rho_0}{\delta}} \lim_{r \rightarrow r_+} \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right|^{\frac{r_+^2}{\delta(r_+ - r_-)} - 1} \quad (2.24)$$

pre jednostrannú limitu. Dá sa však presvedčiť, že táto je z oboch strán rovnaká a teda limity (2.23) a (2.24) možno chápať ako obojstranné.

Dostávame teda podobne ako u Schwarzschildovovej čiernej diery (obr. 1.6 a 1.7), že limita absolútnej hodnoty v rovnici (2.24) je 1 pre $\delta = \delta_+$, 0 pre $\delta < \delta_+$

(takže okolie r_+ sa nedá vnoriť) a pre $\delta > \delta_+$ diverguje (takže plocha zviera s osou r uhol 90°). Na okolí vnútorného horizontu udalostí potom dostaneme opačný záver v dôsledku toho, že v definícii funkcie h rovnicou (2.21) má člen $|1 - r/r_-|$ záporného mocniteľa:

$$\lim_{r \rightarrow r_-} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{4}{\sin^2 \hat{\tau}} \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \lim_{r \rightarrow r_-} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{a^2}, \quad (2.25)$$

kde sme použili l'Hospitalove pravidlo a platí

$$\lim_{r \rightarrow r_-} \frac{dh}{dr} = \frac{-r_-}{\delta(r_+ - r_-)} \left(1 - \frac{r_-}{r_+} \right)^{\frac{r_+^2}{\delta(r_+ - r_-)}} e^{\frac{r_- + \rho_0}{\delta}} \lim_{r \rightarrow r_-} \left| 1 - \frac{r}{r_-} \right|^{\frac{-r_-^2}{\delta(r_+ - r_-)} - 1}. \quad (2.26)$$

Tj. limita absolútnej hodnoty v rovnici (2.26) je 1 pre $\delta = \delta_-$, 0 pre $\delta > \delta_-$ (takže okolie r_- sa nedá vnoriť) a pre $\delta < \delta_-$ diverguje (takže plocha zviera s osou r uhol 90°).

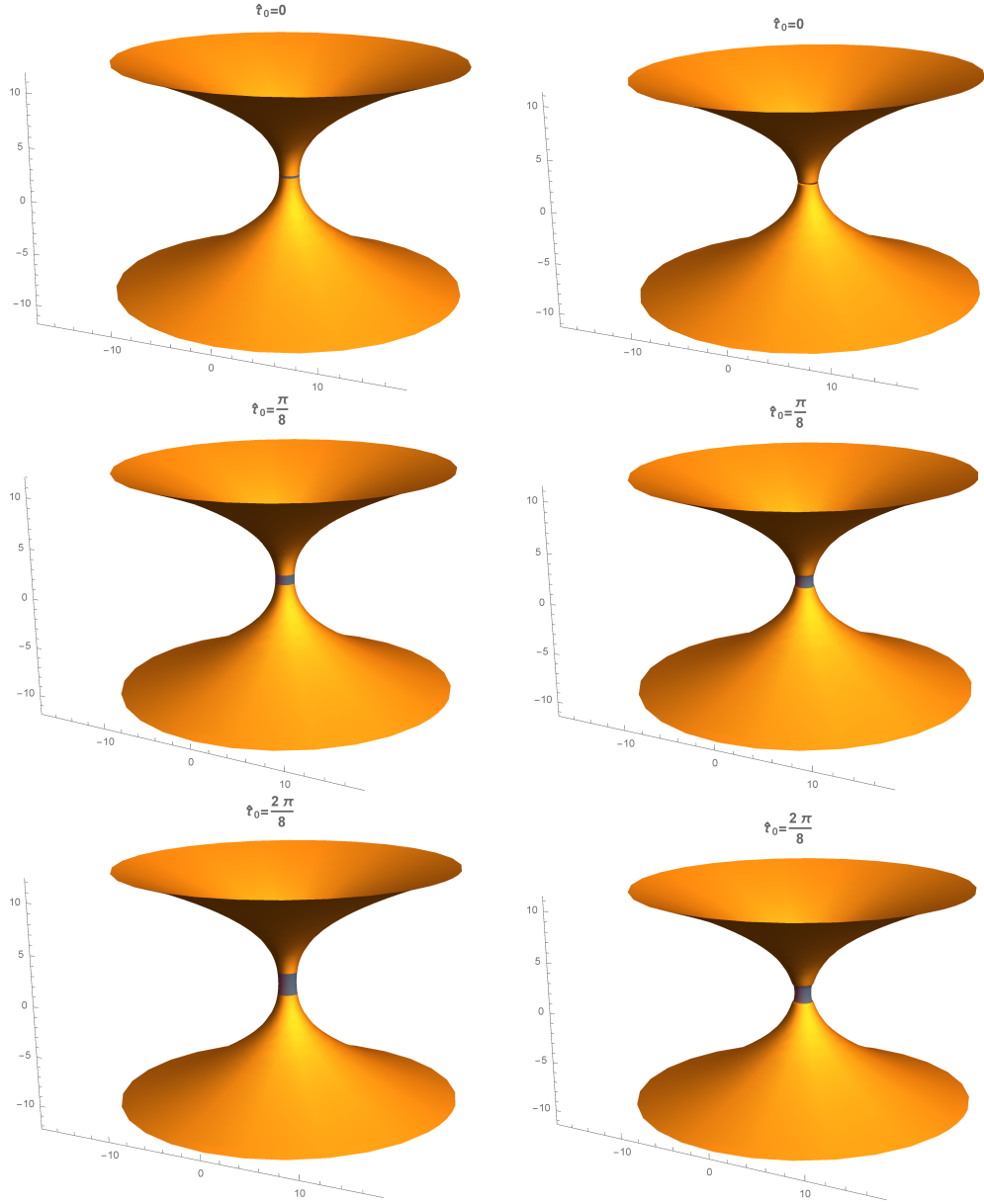
2.2.3 Interpretácia

Podobne ako v prípade Schwarzschildovej čiernej diery, môžeme plynutie parametru $\hat{\tau}_0$ určujúceho konkrétnu vnorovanú priestorupodobnú nadplochu interpretovať ako plynutie času a zmenu konkrétneho tvaru nadplôch ako časový vývoj vesmíru. Pre $r \geq r_{max}$ je potom vesmír statický a celá dynamika sa nachádza v oblasti $r < r_{max}$.

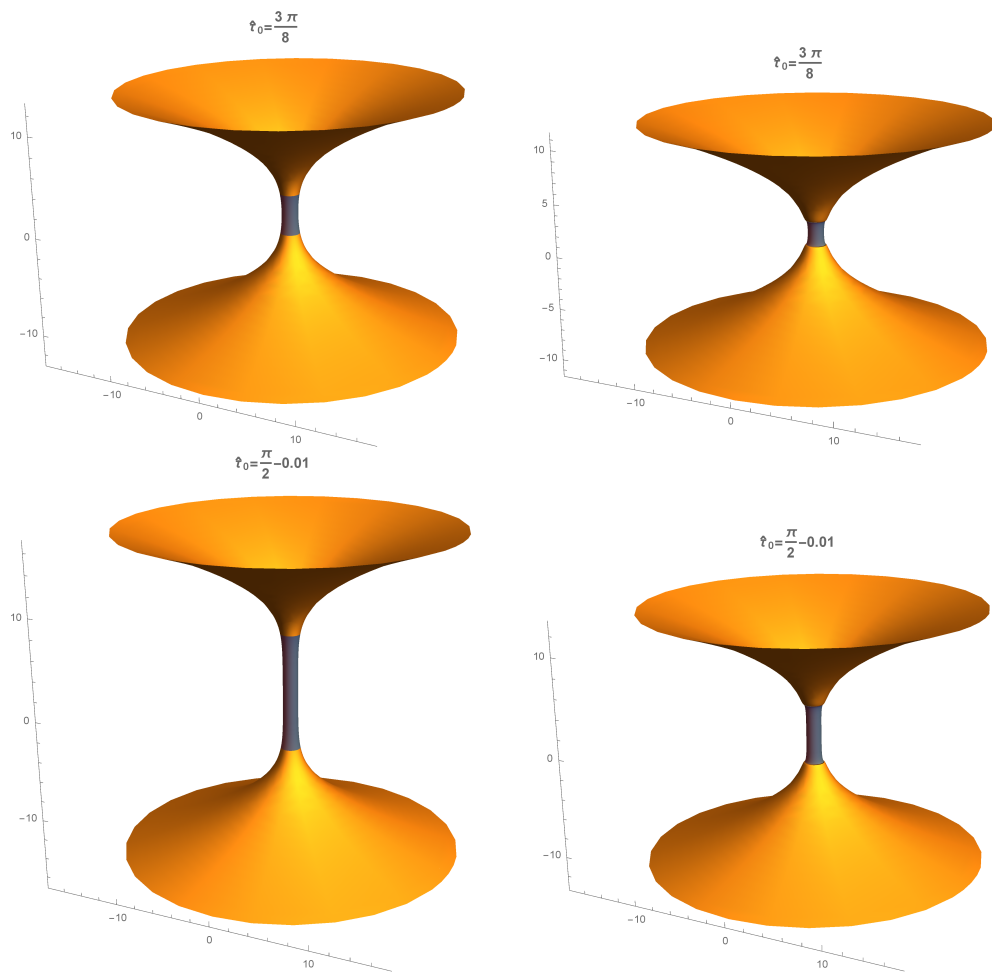
Narozdiel od Schwarzschildovej čiernej diery však nie je možné nájsť počiatok času, keďže hodnoty súradnice $\hat{\tau}$ sú neobmedzené. Vývoj čiernodierového vesmíru je cyklický s periódou 2π . Zvoľme si teda, že ho začneme popisovať od hodnoty $\hat{\tau}_0 = -\pi/2$, ktorú chápeme ako limitu sprava a pre ktorú platí v asymptoticky plochej oblasti $t = -\infty$, kde t odpovedá vlastnému času pozorovateľa, ktorý je vzhľadom k čiernej diere statický. Na tejto hodnote sa vesmír skladá z dvoch paralelných vesmírov spojených Einsteinovým-Rosenovým mostom (obr. 2.5a, 2.5b). Ten sa s plynúcim časom skracuje až do hodnoty $\hat{\tau}_0 = 0$, kde sa vývoj obráti a hrdlo sa symetricky pri zámene $\hat{\tau}_0 \rightarrow -\hat{\tau}_0$ začne rozširovať až do hodnoty $\hat{\tau}_0 = \pi/2$. Pre túto hodnotu dostávame v symptoticky plochej oblasti $t = \infty$.

Následne paralelné vesmíry zaniknú a vznikne bublina končiaci na singularitách, v ktorej pre súradnicu r platí $r < r_+$ (obr 2.5c). Aj napriek tomu, že oblasť $r < r_-$ je značne odlišná od Schwarzschildovho riešenia, vnorené nadplochy pre $\pi/2 < \hat{\tau}_0 < \pi$ sú kvalitatívne podobné tým zo Schwarzschildovej čiernej diery pre $\rho_0 > 0$. Narozdiel od Schwarzschildovej čiernej diery sa však bublina nezmenšuje do nuly, ale v čase $\hat{\tau}_0 = \pi$ dosiahne svojej minimálnej veľkosti a potom sa začne znovu rozširovať, až v čase $\hat{\tau}_0 = 3\pi/2$ sa z nej otvoria dva nové paralelné vesmíry.

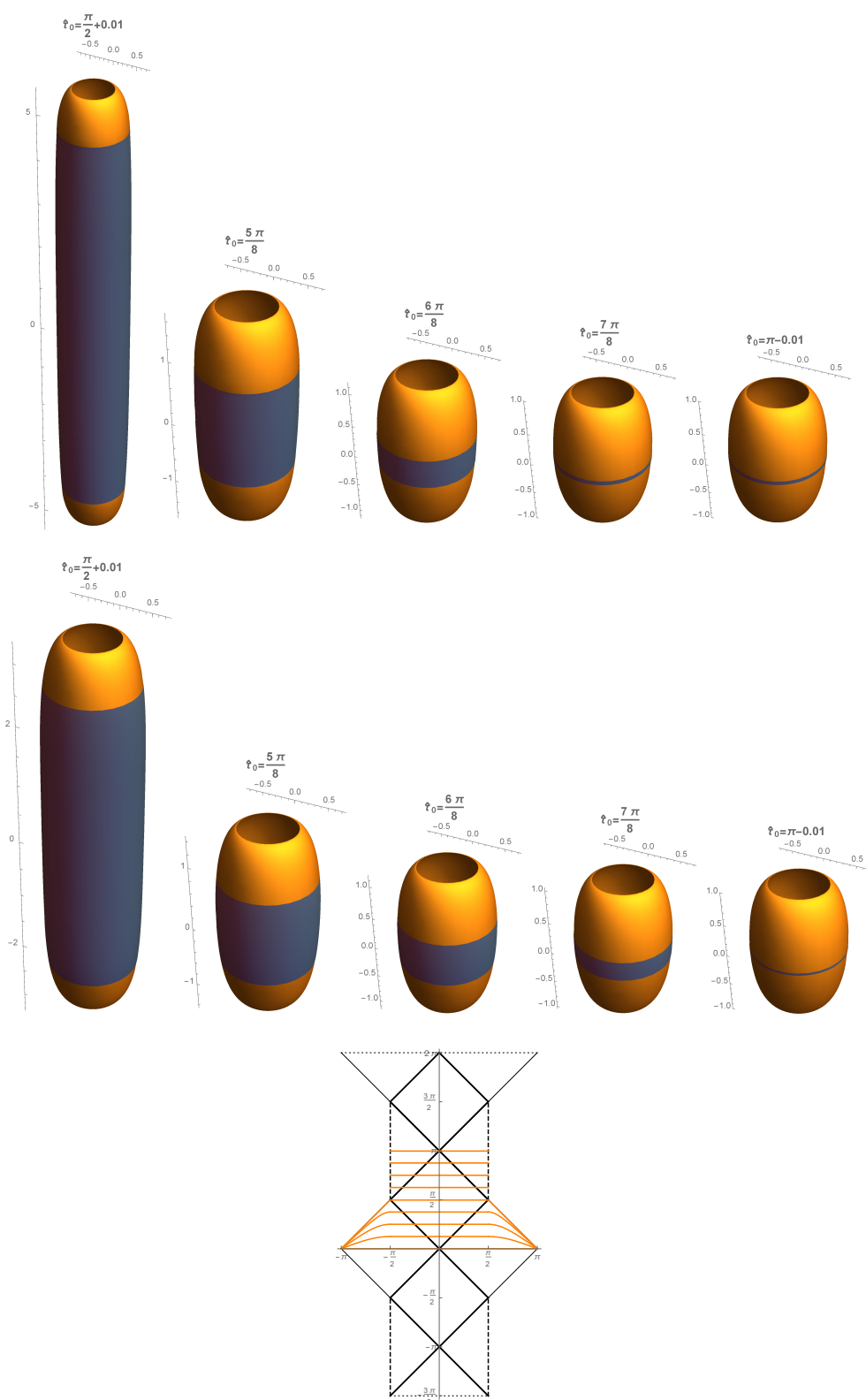
Vývoj ďalej cyklicky pokračuje neobmedzenú dobu.



Obr. 2.5a: Vnorenie nadplochy pre rôzne hodnoty $\hat{\tau}_0$, pre $\rho_0 = 0$, $r_- = 0.7$, pre $\delta = \delta_+$ (vľavo, metrika je v tomto prípade regulárna na vonkajšom horizonte udalostí) a $\delta = \delta_-$ (vpravo, metrika je v tomto prípade regulárna na vnútornom horizonte udalostí). Oblasť $r_- > r > r_+$ vykreslená sivou farbou. Vyjadrené v jednotkách r_+ . Konformný diagram zobrazujúci vnorované nadplochy je v obr. 2.5c dole.



Obr. 2.5b: Konformný diagram zobrazujúci vnorované nadplochy je v obr. 2.5c dole.



Obr. 2.5c: Hranica neodpovedá singularite, ale minimálnej hodnote súradnice r pre ktorú možno vnorenie urobiť. Dole sú vyobrazené vnorované nadplochy v konformnom diagrame.

Kapitola 3

Kerovo riešenie Einsteinových rovníc

Najjednoduchším priblížením výsledku kolapsu reálneho objektu je stacionárne, axiálne symetrické a asymptoticky ploché riešenie Einsteinových rovníc dané Royom Kerrom v roku 1963 (Kerr, 1963). Kerrová metrika vyjadrená v tzv. Boyer-Lindquistových súradniciach (BL) má tvar (Griffiths and Podolský, 2009)

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\varrho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\varrho^2}{\Delta_r} dr^2 + \varrho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\varrho^2} (adt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2, \quad (3.1)$$

kde

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.2)$$

$$\Delta_r = r^2 - 2mr + a^2, \quad (3.3)$$

a m , a sú konštanty popisujúce hmotnosť a rotáciu centra.

Priestoročas obsahuje dva horizonty udalostí pre $\Delta_r = 0$, prstencovú singularitu pre $\varrho^2 = 0$ a ergosféru pre $g_{tt} = 0$, tj. pre

$$r_{e\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.4)$$

Prítomnosť ergosféry, resp. nediagonálneho člena v metrike spôsobuje, že nemôžeme priamočiaro užitím postupu z predošlých kapitol zaviesť vhodné súradnice na skonštruovanie konformného diagramu. Kauzálnu štruktúru priestoročasu tak najskôr v kapitole 3.1 vyšetrujeme pomocou vyobrazenia prieniku chronologickej budúcnosti zvoleného bodu priestoročasu s nadplochami konštantných hodnôt BL súradnice t .

Následne v kapitole 3.2 zavedieme súradnice vhodné na skonštruovanie konformného diagramu na okolí vonkajšieho horizontu udalostí. V týchto súradniciach ukážeme v kapitole 3.2.2 regulárnosť metriky na vonkajšom horizonte udalostí.

Následne v kapitole 3.2.3 skonštruujeme v ekvatoriálnej rovine kauzálny diagram, zavedním uhlovej diagramovej súradnice, ktorá nebude jednoznačne definovaná BL súradnicami. Tým obídeme problémy súvisiace s vhodnou voľbou časupodobnej nadplochy na ktorej chceme konformný diagram konštruovať.

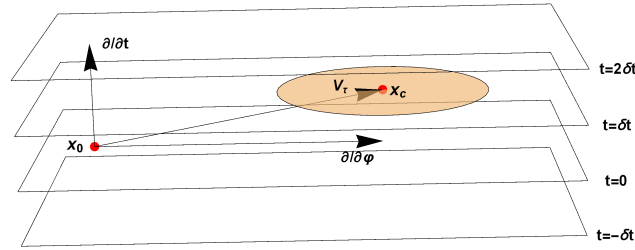
Skonštruované diagramové súradnice potom opäť využijeme na voľbu vhodných dvojrozmerných priestorupodobných diagramov, ktoré vnoríme do Euklidovského priestoru v kapitole 3.3.1.

Nakoniec do Euklidovského priestoru vnoríme aj prienik vonkajšej ergosféry a horizontu udalostí s nadplochou $t = \text{konšt.}$ v kapitole 3.3.2.

3.1 Kauzálna štruktúra V BL súradniciach

3.1.1 Teoretická príprava

Prítomnosť rotácie v Kerrovom priestoročase značne komplikuje jeho vizualizáciu. Kauzálnu štruktúru v prípade Schwarzschildovho a Reissnerovho-Nordströmovho priestoročasu (ozn. RN) sme vyobrazili použitím konformného diagramu konštruovaného na nadplochách definovaných konštantnosťou uhlových súradníc (φ, θ) . BL uhlové súradnice však nedefinujú časupodobné nadplochy, keďže táto mení svoj charakter na ergosférach a horizontoch udalostí¹. Ak by sme trvali na konštrukcii dvojdimenzionálneho konformného diagramu, musíme najskôr hľadať vhodné časupodobné nadplochy, ktoré určitým spôsobom reprezentujú štruktúru priestoročasu. Konformný diagram náhodnej časupodobnej nadplochy totiž nemusí mať dobrú výpovednú hodnotu o štruktúre priestoročasu ako celku.



Obr. 3.1: Schématické znázornenie foliácie priestoročasu na nadplochy konštantnej hodnoty súradnice t s jednou dimenziou potlačenou. Farebne vyplnená oblasť znázorňuje oblasť nadplochy $t = \delta t$ v infinitezimálnej vzdialenosti od bodu x_0 v kauzálnom kontakte s týmto bodom.

Predtým, než sa pokúsime o hľadanie vhodnej nadplochy, analyzujeme kauzálnu štruktúru priamo v BL súradniciach. Foliujeme priestoročas na nadplochy konštantnej hodnoty súradnice t (obr. 3.1). Vzhľadom na to, že súradnica t je ignorovateľná, budú všetky tieto nadplochy ekvivalentné.

Majúc priestoročas foliovaný na trojdimenzionálne nadplochy, môžeme kauzálnu štruktúru zachytiť zobrazením bodov x ležiacich na určitej nadploche, ktoré sú v kauzálnom kontakte s vybraným bodom x_0 , tj. prienikom chronologickej budúcnosti bodu x_0 s vybranou nadplochou. Symetriu priestoročasu v súradnici t a φ využijme na voľbu $t_0 = 0$ a $\varphi_0 = 0$. Pre jednoduchosť uvažujme len nadplochy v infinitezimálnej vzdialenosti od x_0 , tj. nadplochy s hodnotou súradnice $t = \delta t$, kde δt je infinitezimálne.

¹Indukovaná metrika na nadploche je $ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2$ a bázu dotyčnicového priestoru môžeme vytvoriť z vektorov $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial t$. Aby bola nadplocha časupodobná, musí existovať lineárna kombinácia týchto vektorov, ktorej norma je záporná. To vedie na podmienku $g < 0$, kde $g = g_{tt}g_{rr}$ je determinant indukovanej metriky na nadploche. Podmienky sú splnené nad vonkajšou a pod vnútornou ergosférou a medzi vonkajším a vnútorným horizontom, takže na oblasti medzi vonkajším, resp. vnútorným horizontom a vonkajšou, resp. vnútornou ergosférou je nadplocha priestorupodobná.

Nadplocha $t = \text{konšt.}$ je časupodobná pre $r \in (r_-, r_+)$ a na doplnku uzavru tohto intervalu je priestorupodobná. Vektorové pole V_τ ortogonálne na túto nadplochu má tvar

$$V_\tau = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.5)$$

Až na normalizáciu toto pole nad vonkajším a pod vnútorným horizontom udalostí popisuje štvorrýchlosť ZAMO (Zero Angular Momentum Observer) pozorovateľov², ktorí vnímajú udalosti na nadplochách $t = \text{konšt.}$ vo svojom blízkom okolí ako súčasné. Pokiaľ by takýto pozorovateľ robil experiment, v ktorom v bode x_0 vyšle sféricky symetrický svetelný pulz a po uplynutí jeho vlastného času $\delta\tau$ odmeria polohu a tvar pulzu, bude jeho výsledok odpovedať hranici hľadanej oblasti, tj. oblasti danej prienikom nadplochy $t = \text{konšt.}$ prechádzajúcej bodom, v ktorom sa pozorovateľ nachádza v dobe merania, s chronologickou budúcnosťou bodu x_0 .

Nadplochy $t = \text{konšt.}$ sú časupodobné medzi horizontmi udalostí. V prípade, že $r \in (r_-, r_+)$ tak môžeme vykresliť hranicu prieniku chronologickej budúcnosti bodu x_0 priamo s nadplochou $t = 0$. Zaujímá nás len lokálna štruktúra, takže tento prienik urobme len na infinitezimálne malom okolí bodu x_0 , čím dostaneme štruktúru svetelného kuželu v bode x_0 obmedzenú na dotyčnicový priestor nadplochy $t = \text{konšt.}$ Okrem tejto možnosti, môžeme kresliť prienik s nadplochou $t = \delta t$, kde bude vidieť jeho posun v dôsledku nerovnosti súradnicového vektorového poľa $\partial/\partial t$ s ortogonálnym vektorovým poľom V_τ .

Na infinitezimálne malom okolí bodu x_0 môžeme metriku považovať za konštantnú. Pre jednoduchosť značenia v nasledujúcom texte tak chápme metrické koeficienty ako konštanty dané ich hodnotou v bode x_0 , tj. pre zvyšok kapitoly platí $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x_0)$. Zavedme súradnice centrovane na bod x_0 :

$$T = \left| g_{tt} - \frac{g_{\varphi t}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right|^{\frac{1}{2}} t \equiv T_t t, \quad (3.6)$$

$$k = \left(\varphi + t \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right) \sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \quad (3.7)$$

$$R = \sqrt{|g_{rr}|} (r - r_0), \quad (3.8)$$

$$l = \sqrt{g_{\theta\theta}} (\theta - \theta_0). \quad (3.9)$$

Metrika potom prejde na Minkowského tvar

$$ds^2 = -\text{sgn}(\Delta_r) dT^2 + \text{sgn}(\Delta_r) dR^2 + dk^2 + dl^2, \quad (3.10)$$

²ZAMO pozorovatelia sú definovaní ako pozorovatelia so štvorrýchlosťou u , pre ktorú moment hybnosti je nulový (Raine and Thomas, 2010)

$$0 = L \equiv (\xi_\varphi, u),$$

kde $\xi_\varphi = \partial/\partial\varphi$ je Killingov vektor asociovaný s axiálnou symetriou metriky a zátvorka značí skalárny súčin.

ktorý je prvým priblížením plnej metriky na infinitezimálnom okolí bodu x_0 . Pre toto okolie bude priestoročasový interval medzi bodmi x a x_0 , kde x leží na nadploche $t = \delta t = T/T_t$, daný rovnicou

$$|x - x_0|^2 = -\text{sgn}(\Delta_r) T_t^2 \delta t^2 + \text{sgn}(\Delta_r) R^2 + k^2 + l^2. \quad (3.11)$$

Hranica oblasti, ktorá je v kauzálnom kontakte s bodom x_0 bude daná nulovosťou tohto intervalu, tj.

$$\text{sgn}(\Delta_r) T_t^2 \delta t^2 = \text{sgn}(\Delta_r) R^2 + k^2 + l^2. \quad (3.12)$$

Pokiaľ $\Delta_r > 0$ (tj. nad vonkajším a pod vnútorným horizontom udalostí, $r \in (0, r_-) \cup (r_+, \infty)$) dostávame

$$T_t^2 \delta t^2 = R^2 + k^2 + l^2. \quad (3.13)$$

Rovnica popisuje sféru na nadploche $t = \delta t$ s polomerom $T_t \delta t$ centrovanej na nulových hodnotách súradníc (T, R, k, l) . Sféru možno parametrizovať pomocou sférických súradníc

$$k = T_t \delta t \cos \alpha, \quad (3.14)$$

$$R = T_t \delta t \sin \alpha \cos \beta, \quad (3.15)$$

$$l = T_t \delta t \sin \alpha \sin \beta, \quad (3.16)$$

parametrami $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Inverznou transformáciou môžeme prejsť naspäť k BL súradniciam a dostaneme

$$r - r_0 = \frac{T_t}{\sqrt{|g_{rr}|}} \sin \alpha \cos \beta \delta t, \quad (3.17)$$

$$\varphi = \left(\frac{T_t}{\sqrt{|g_{\varphi\varphi}|}} \cos \alpha - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right) \delta t, \quad (3.18)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{T_t}{\sqrt{|g_{\theta\theta}|}} \sin \alpha \sin \beta \delta t. \quad (3.19)$$

Pripomeňme, že volíme $\varphi_0 = t_0 = 0$.

V oblasti medzi horizontmi udalostí, tj. pre $\Delta_r < 0$, dostávame

$$-T_t^2 \delta t^2 = -R^2 + x^2 + y^2, \quad (3.20)$$

čo je rovnica rotačného hyperboloidu. Vzhľadom na to, že naša konštrukcia je použiteľná len v malom okolí bodu x_0 , hyperboloid vykreslíme len do malej vzdialenosti $R = \delta R$. Hyperboloid parametrizujeme pomocou parametrov $\alpha \in (0, 2\pi)$ a $\beta = R/T_t \in (-\beta_{max}, -\delta t)$ vzťahmi

$$k = T_t \sqrt{\beta^2 - \delta t^2} \sin \alpha, \quad (3.21)$$

$$l = T_t \sqrt{\beta^2 - \delta t^2} \cos \alpha, \quad (3.22)$$

$$R = T_t \beta \quad (3.23)$$

a inverznou transformáciou dostaneme v BL súradniciach

$$r - r_0 = \frac{T_t \beta}{\sqrt{|g_{rr}|}}, \quad (3.24)$$

$$\varphi = T_t \sqrt{\frac{\beta^2 - \delta t^2}{g_{\varphi\varphi}}} \sin \alpha - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \delta t, \quad (3.25)$$

$$\theta - \theta_0 = T_t \sqrt{\frac{\beta^2 - \delta t^2}{g_{\theta\theta}}} \cos \alpha. \quad (3.26)$$

V prípade $\delta t \neq 0$, môžeme miesto parametru β zaviesť parameter $\gamma = \beta/\delta t$:

$$r - r_0 = \frac{T_t \gamma}{\sqrt{|g_{rr}|}} \delta t, \quad (3.27)$$

$$\varphi = \left(T_t \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{g_{\varphi\varphi}}} \sin \alpha - \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right) \delta t, \quad (3.28)$$

$$\theta - \theta_0 = T_t \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{g_{\theta\theta}}} \cos \alpha \delta t. \quad (3.29)$$

Pre $m = 0$ sa Kerrova metrika redukuje na Minkowského priestoročas v BL súradniciach, ktorými možno kartézské súradnice vyjadriť vzťahmi (Griffiths and Podolský, 2009)

$$x' = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi, \quad (3.30)$$

$$y' = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi, \quad (3.31)$$

$$z' = r \cos \theta. \quad (3.32)$$

Obrázok vykreslíme (až na škálovanie) v týchto (x', y', z') súradniciach. Keďže však rozdiel bodu x od bodu x_0 je infinitezimálny, rozviňme do prvého rádu

$$x' - x'_0 = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \sin \theta_0 (r - r_0) + \sqrt{r_0^2 + a^2} \cos \theta_0 (\theta - \theta_0), \quad (3.33)$$

$$y' - y'_0 = \sqrt{r_0^2 + a^2} \sin \theta_0 \varphi, \quad (3.34)$$

$$z' - z'_0 = (r - r_0) \cos \theta_0 - r_0 \sin \theta_0 (\theta - \theta_0), \quad (3.35)$$

kde sme využili $\varphi_0 = 0$.

Zo vzťahov (3.17)-(3.19), (3.27)-(3.29) a (3.33)-(3.35) si možno všimnúť, že rozdiely súradníc bodov x a x_0 sú škálované parametrom δt , ktorý určuje výber konkrétnej nadplochy $t = \text{konšt.}$ Toto škálovanie neprináša nijakú zaujímavú informáciu, takže obrázok vykreslíme v jednotkách δt , čím sa zbavíme závislosti

na ifinitezimálne malom parametre. Efektívne tak môžeme v rovniciach položiť $\delta t = 1$ a tieto súradnice označíme nečiarkovane (x, y, z) .

Pre $\delta t = 0$ zase možno z rovníc (3.24)-(3.26) a (3.33)-(3.35) vidieť, že pravá strana je škálovaná parametrom β . V tomto prípade tak možno obrázok vykresliť v jednotkách β_{max} a pre parameter β tak bude efektívne platiť $\beta \in (-1, 0)$. Škálované súradnice opäť označíme nečiarkovane.

Zhrnutie: Vizualizujeme kauzálu štruktúru Kerrovho priestoročasu v BL súradniciach následovným spôsobom:

- Zvolíme počiatočný bod x_0 , pričom bez újmy na všeobecnosti voľme $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.
- Na nadploche $t = \delta t$, kde δt je infinitezimálne malé, vyobrazíme hranicu oblasti v kauzálnom kontakte s bodom x_0 .
- Pokiaľ $r \in (r_-, r_+)$, môžeme vykresliť svetelný kužeľ aj priamo na nadploche $t = 0$. Vykreslenie pre jednoduchosť urobíme len pre infinitezimálne malé okolie bodu x_0 .
- Výsledný obrázok vykreslíme v jednotkách infinitezimálnych parametrov.

3.1.2 Analýza konformnej štruktúry

Nad vonkajším horizontom udalostí

Pozrime sa najskôr na oblasť nad vonkajším horizontom udalostí. Zrejme najvýraznejší efekt rotácie čiernej diery je v ekvatoriálnej rovine, a tak ako prvé analyzujeme pulz vyslaný z bodu x_0 ležiaceho práve v ekvatoriálnej rovine (obr. 3.2a).

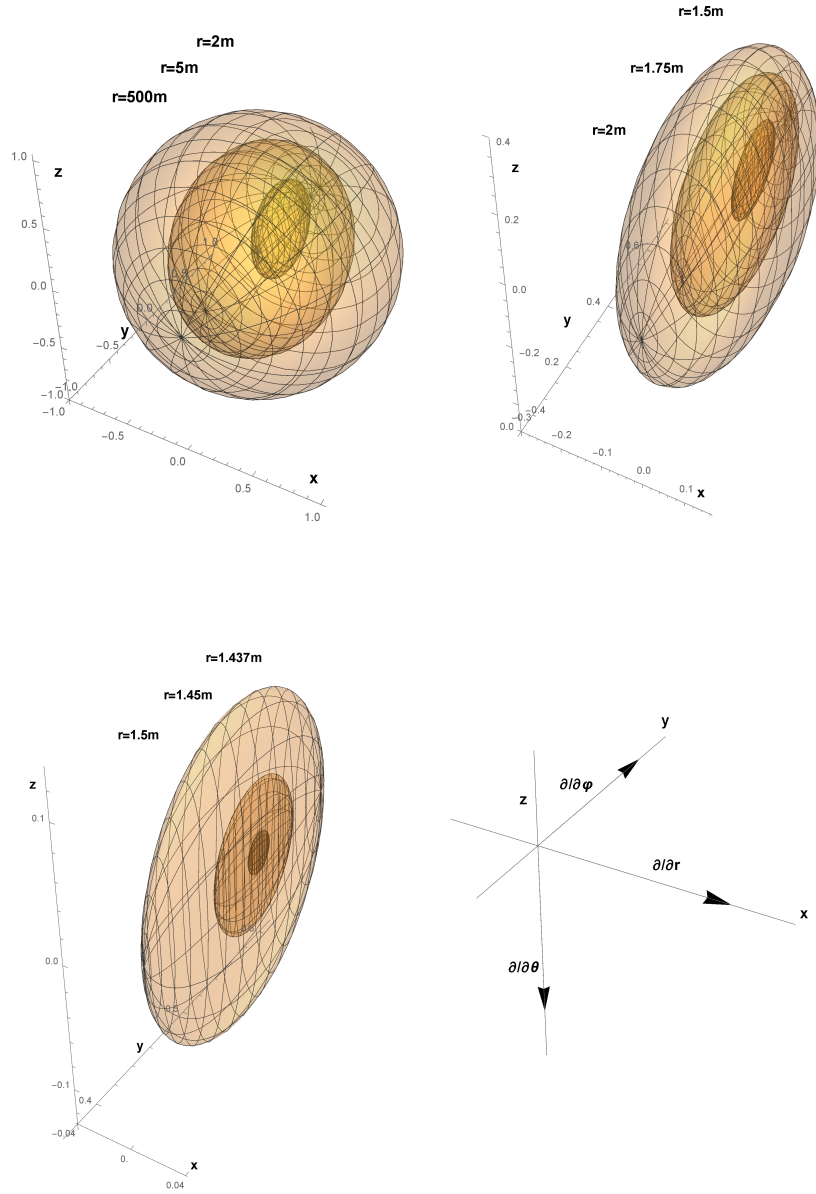
Ako si možno z obrázku všimnúť, smerom k horizontu udalostí sa pulz posúva v smere súradnice y , ktorá odpovedá smeru $\partial/\partial\varphi$, zároveň sa zmenšuje a výrazne sploštuje v smere súradnice x , odpovedajúcej smeru $\partial/\partial r$. Ako čakáme, pre ergosféru $r_{e+} = 2m$ je minimálna hodnota súradnice y na pulze rovná nule, a teda krivka konštantných hodnôt súradníc r , θ a φ už nemôže byť časupodobná, a teda sa po nej nemôže pohybovať žiadny hmotný pozorovateľ. Tento efekt sa ďalej zväčšuje smerom k horizontu udalostí.

Možno si taktiež všimnúť, že ako sa s bodom x_0 blížíme k horizontu udalostí, oblasť, ktorá je v kauzálnom kontakte na nadploche $t = \delta t$ s týmto bodom, sa neustále zmenšuje do nuly.

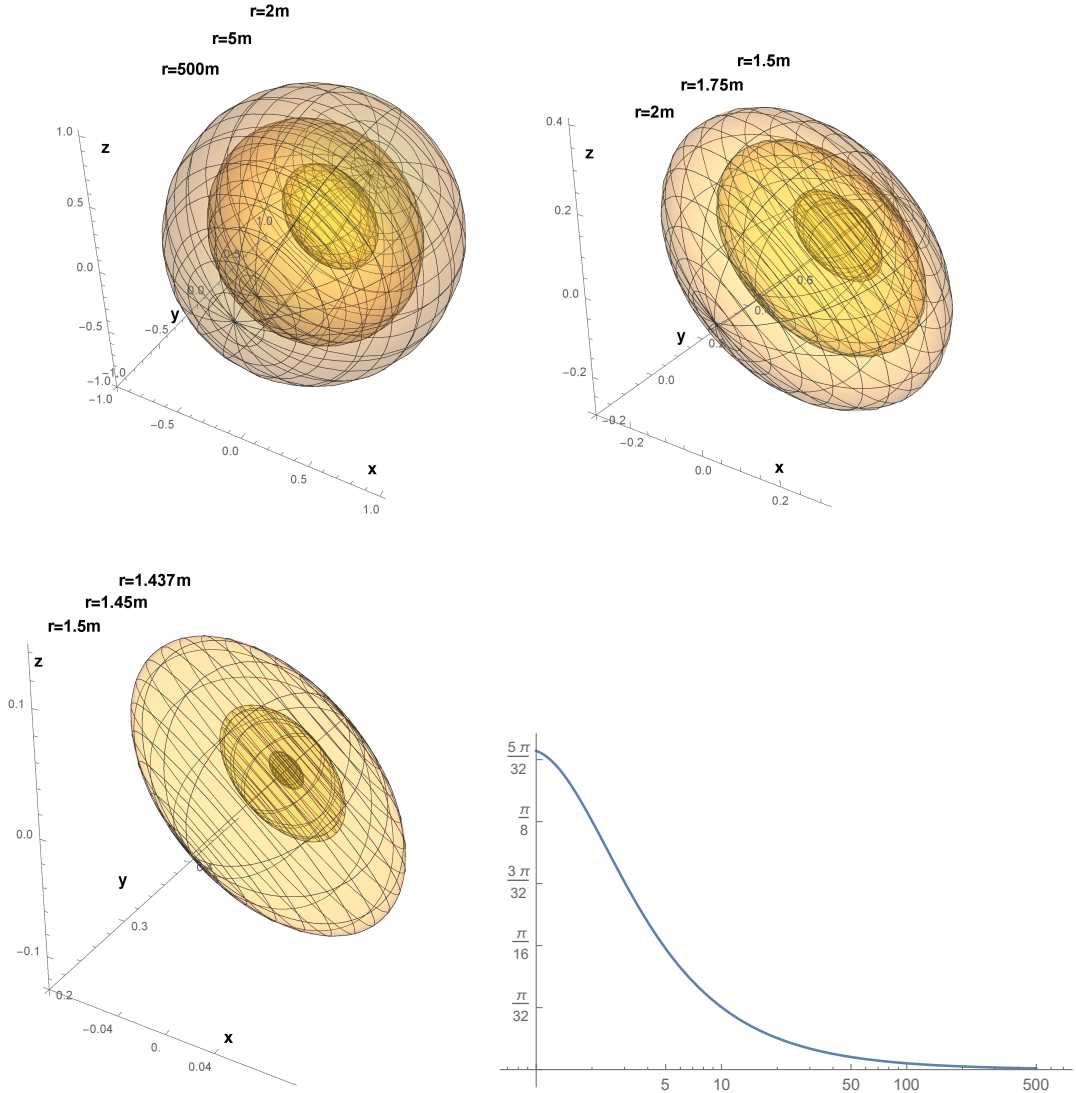
Mimo ekvatoriálnu rovinu (obr. 3.2b) je situácia kvalitatívne veľmi podobná tej v ekvatoriálnej rovine. Pulz sa stále posúva v smere y , zmenšuje a sploštuje v smere vektoru $\partial/\partial r$, ktorý však pre všeobecný uhol nieje daný smerom $\partial/\partial x$, ako tomu bolo v ekvatoriálnej rovine, ale je daný lineárnou kombináciou $\partial/\partial x$ s $\partial/\partial z$. Už z obrázku možno vidieť, že posun centra pulzu sa v smere y zmenšuje, až na ose symetrie (Obr. 3.2c) úplne vymizne.

Aby sme mali jasnú predstavu ako sa pulz pri zmene bodu x_0 , z ktorého bol vyslaný mení, zavedme si centrálny bod pulzu x_c a hrúbku d_r , dĺžku d_y a šírku d_θ pulzu.

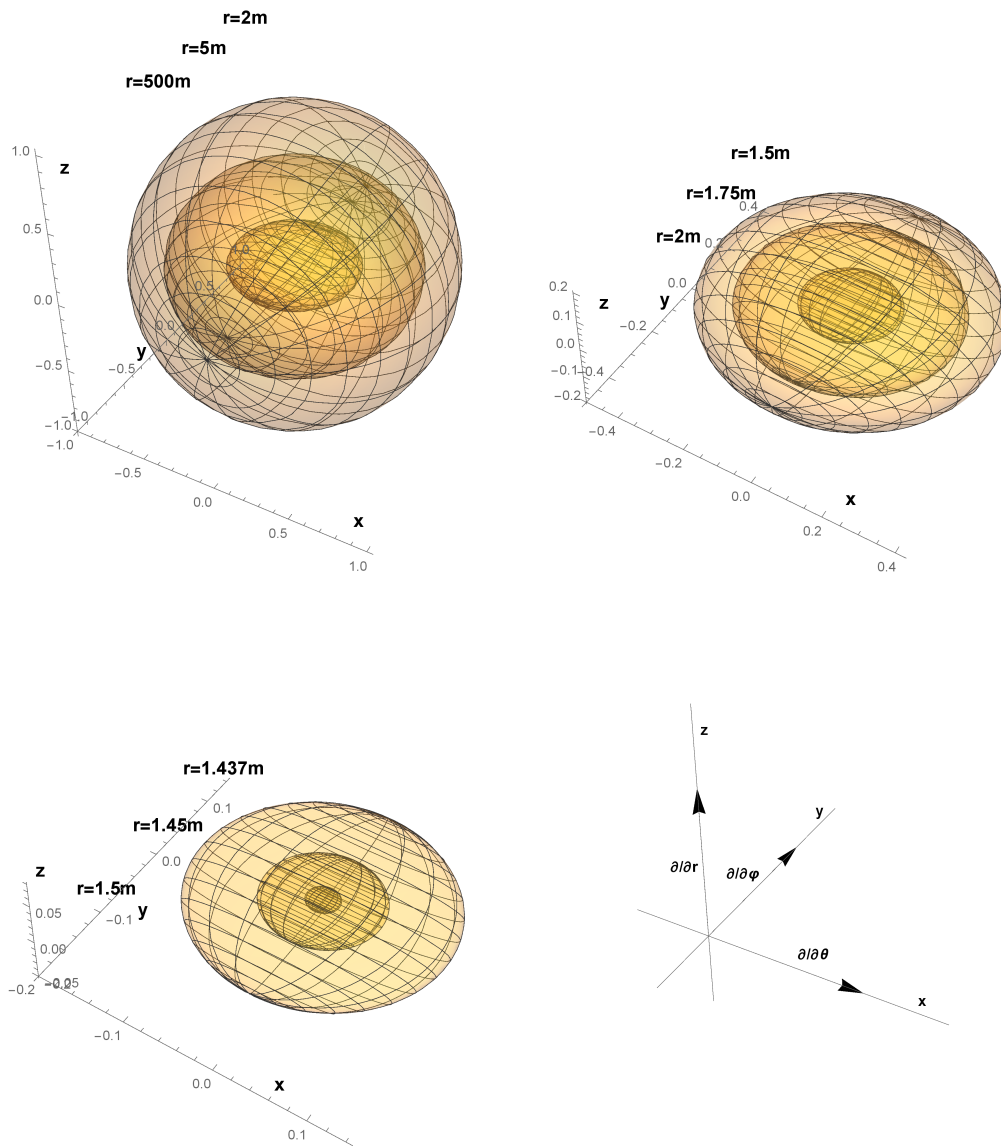
Centrálny bod pulzu bude bod, ktorý vznikne prienikom integrálnej krivky vektorového poľa V_τ prechádzajúcej bodom x_0 s nadplochou $t = \delta t$ (obr. 3.1).



Obr. 3.2a: Oblast nadplochy $t = \delta t$ v kauzálnom kontakte s bodom $x_0 = (0,0,0)$ v súradniciach (x,y,z) a ležiacom v ekvatoriálnej rovine pre $r > r_+ \doteq 1.4359m$ a $a = 0.9m$ s ergosférou na $r = 2m$. Túto oblasť je možné interpretovať ako tvar svetelného pulzu vyslaného z bodu x_0 a meraného ZAMO pozorovateľom na danej nadploche $r, \theta = \text{konšt.}$ Súradnice x, y a z sú centrovane na bod x_0 a preškalované parametrom δt oproti čiarkovaným súradniciam zavedeným rovnicami (3.33)-(3.35). Každý pulz v obrázkoch odpovedá inej voľbe hodnoty súradnice r , z ktorej bol pulz vyslaný. Konkrétne menší pulz odpovedá menšej hodnote r . Vpravo dole sú uvedené pôvodné BL smery. Ako si možno všimnúť pulz sa smerom k horizontu udalostí sploštuje v smere $\partial/\partial r$, zmenšuje a posúva v smere súradnice $\partial/\partial \varphi$.



Obr. 3.2b: Oblať nadplochy $t = \delta t$ v kauzálnom kontakte s bodom x_0 ležiacom na nadploche $\theta = \pi/4$ pre $r > r_+ \doteq 1.43589m$ a $a = 0.9m$. Ergosféra sa nachádza na $r_{e+} = 1.7714m$. BL smer $\partial/\partial\varphi$ naďalej odpovedá smeru súradnice y , no smery $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\theta$ sú dané lineárnou kombináciou smerov $\partial/\partial x$ a $\partial/\partial z$, závislou na hodnote súradnice r bodu x_0 . Uhol medzi $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial z$ je vyobrazený vpravo dole, vektor $\partial/\partial\theta$ potom bude kolmý na vektory $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\varphi$. Pulz sa taktiež sploštuje v smere $\partial/\partial r$, posúva v smere $\partial/\partial\varphi$ a zmeňuje, ako sa blížime horizontu udalostí.

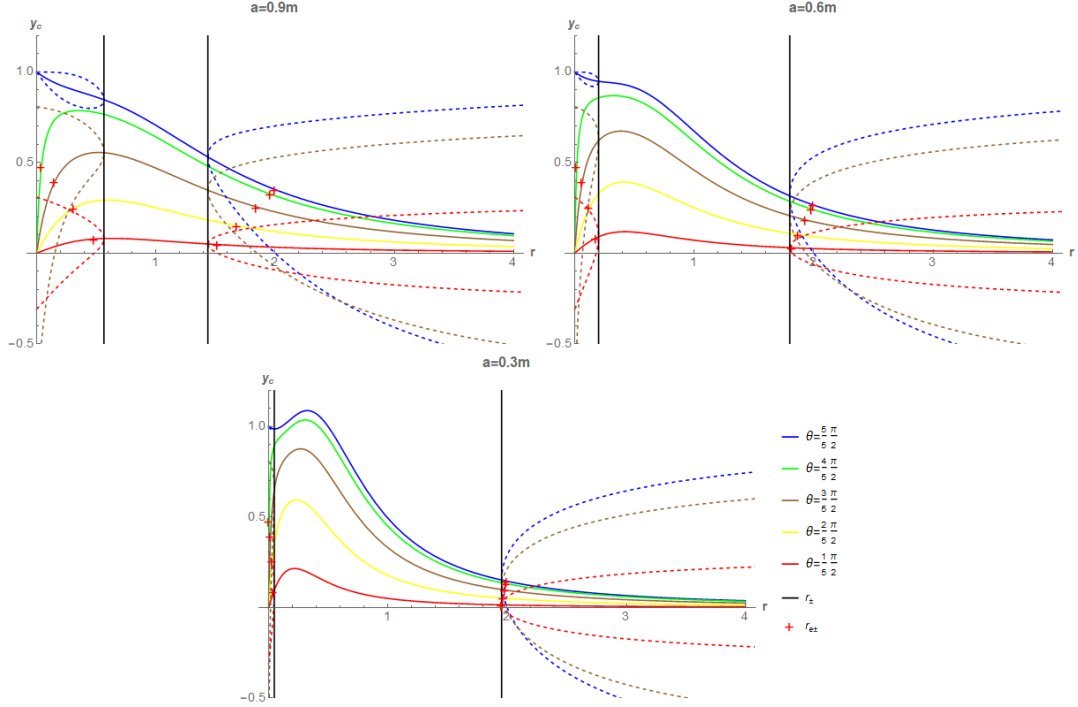


Obr. 3.2c: Oblasť nadplochy $t = \delta t$ v kauzálnom kontakte s bodom x_0 na nadploche $\theta = 0$ pre $r > r_+ = r_{e+} \doteq 1.43589m$ a $a = 0.9m$. Vpravo dole sú zobrazené pôvodné BL smery.

Jeho poloha v súradniciach x , y a z bude daná vzťahom

$$y_c = -\sqrt{r_0^2 + a^2} \sin^2 \theta_0 \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2ma\sqrt{r_0^2 + a^2} \sin^2 \theta_0 r_0}{(r_0^2 + a^2)^2 - \Delta_r|_{r_0} a^2 \sin^2 \theta_0}, \quad (3.36)$$

zatiaľ čo súradnice x_c a z_c ostávajú nulové. Hodnota tejto súradnice pre rôzne θ_0 ako funkcia súradnice r_0 je vyobrazená v obrázku 3.3.



Obr. 3.3: Hodnota súradnice y_c pre rôzne hodnoty θ_0 a parametru a ako funkcia od r . Pod vnútorným a nad vonkajším horizontom udalostí je čiarkovane vyobrazená aj maximálna a minimálna hodnota súradnice y na pulze, tj. súradnicový rozmer pulzu v smere súradnice y ($\partial/\partial\varphi$).

Z obrázku vidno, že nad horizontom udalostí veľkosť y_c klesá do nuly s rastúcim r , s klesajúcim a a s θ približujúcim sa k ose symetrie. Asymptotika pre veľké hodnoty súradnice r je $\sim 2ma \sin^2 \theta / r^2$. Maximum na oblasti $r \geq r_+$ nastáva pre $a = m$, $\theta = \pi/2$ a $r = r_+$ s hodnotou $y_c = 1/\sqrt{2}$.

Dĺžku pulzu môžeme definovať ako súradnicovú veľkosť pulzu v smere y vťahom $d_y = y_{max} - y_c$, kde y_{max} je maximálna hodnota súradnice y na pulze, keďže osa y odpovedá ose symetrie pulzu. Túto hodnotu dostaneme dosadením $\alpha = 0$ v rovnici (3.18).

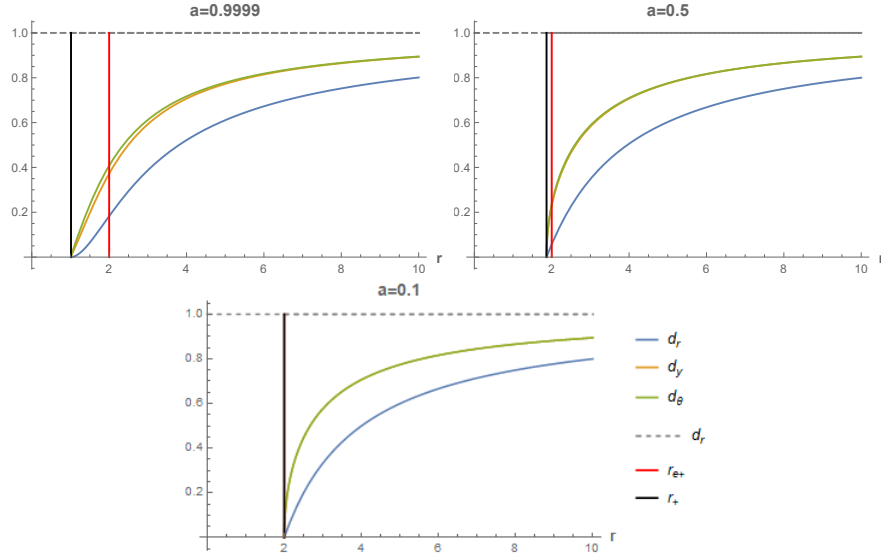
Zvyšné dve osy symetrie pulzu v smeroch $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\theta$ sú však vzhľadom k osám x a z natočené. Zo vzťahov (3.17), (3.19) však vidíme, že smeru $\partial/\partial r$ odpovedá hodnota parametrov $\alpha = \pi/2$ a $\beta = 0$ a smeru $\partial/\partial\theta$ odpovedá $\beta = \pi/2$. Dosadením môžeme získať hodnoty súradníc x a z a Pytagorovou vetou potom definujeme hrúbku (v smere $\partial/\partial r$) a šírku (v smere $\partial/\partial\theta$) pulzu. Dostávame tak

$$d_r = \frac{T_t}{\sqrt{g_{rr}}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2 + a^2} \sin^2 \theta}, \quad (3.37)$$

$$d_y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \frac{T_t}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}, \quad (3.38)$$

$$d_\theta = T_t. \quad (3.39)$$

Takto definované veličiny tak udávajú súradnicové rozmery pulzu v súradniciach (x,y,z) v smere jeho os symetrie. Závislosť týchto veličín je pre rôzne hodnoty parametru a vyobrazená v obrázku 3.4 pre ekvatoriálnu rovinu.

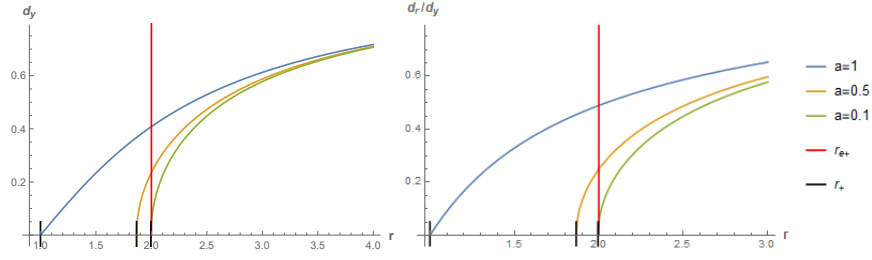


Obr. 3.4: Šírka (d_θ), hrúbka (d_r) a dĺžka (d_y) pulzu (zavedená rovnicami (3.37)-(3.39) a vyjadrujúca súradnicové rozmery pulzu po rade v smeroch $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\varphi$) v ekvatoriálnej rovine ako funkcia od r pre $r > r_+$. Vyobrazená pre rôzne hodnoty rotačného parametru a . Vyjadrené v jednotkách m .

Z obrázku sa môžeme presvedčiť, že veľkosť pulzu skutočne ide do nuly, ako sa x_0 približuje horizontu udalostí, a že konverguje k sfére o jednotkovom polomere pre veľké r tak, ako by sme čakali z asymptotickej plochosti Kerrovho priestoročasu. Zároveň si možno všimnúť, že rotácia (tj. hodnota rotačného parametru a) zapríčiňuje v blízkosti horizontu udalostí znižovanie rýchlosti, s ktorou pulz rastie s rastúcou hodnotou súradnice r a zároveň zvyšuje veľkosť pulzu pre dané r . Na porovnanie je v obrázku 3.5 vyobrazená závislosť d_y na r v ekvatoriálnej rovine pre tri rôzne hodnoty parametru a , odkiaľ túto vlastnosť možno ľahko vidieť.

To sa dá interpretovať ako účinok odstredivej sily, ktorá spôsobuje efektívne znižovanie sily gravitačnej. Smerom k centru odstredivá sila narastá a teda rozdiel medzi gravitačnou silou s nízkou a vysokou hodnotou parametru a narastá taktiež.

Podobná je situácia pre splošťovanie pulzu vyjadreného pomocou hodnoty d_r/d_y v obrázku 3.5 vpravo.



Obr. 3.5: Vľavo: závislosť d_y (tj. súradnicového rozmeru pulzu v smere $\partial/\partial\varphi$) na r v ekvatoriálnej rovine pre hodnoty parametru $a = 1$, $a = 0.5$ a $a = 0.1$. Vpravo: závislosť d_r/d_y (tj. pomer súradnicovej veľkosti pulzu v smeroch $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\varphi$) vyjadrujúca splošťovanie pulzu pre rôzne hodnoty rotačného parametru a v ekvatoriálnej rovine. Vyjadrené v jednotkách m .

Medzi vnútorným a vonkajším horizontom udalostí

Reštrikcia svetelného kuželu v bode x_0 na nadplochu $t = 0$, $\theta = \text{konšt.}$, v ktorej bod x_0 leží, je vyobrazený v obr. 3.6 vľavo.

Miesto vykresľovania tohto kuželu pre rôzne body priestoročasu vykreslíme iba závislosť extrémnych (η_1, η_2) uhlov, ktoré kužel zvierá so svojou osou symetrie, tj. s vektorom $\partial/\partial r$, v súradniciach (x, y, z) (obr. 3.7). Tie dostaneme pre parameter $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi/2$:

$$\tan \eta_1 = \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{-\Delta_r g_{\varphi\varphi}}} \sin \theta, \quad (3.40)$$

$$\cos \eta_2 = \sqrt{\frac{-\Delta_r}{2mr}}. \quad (3.41)$$

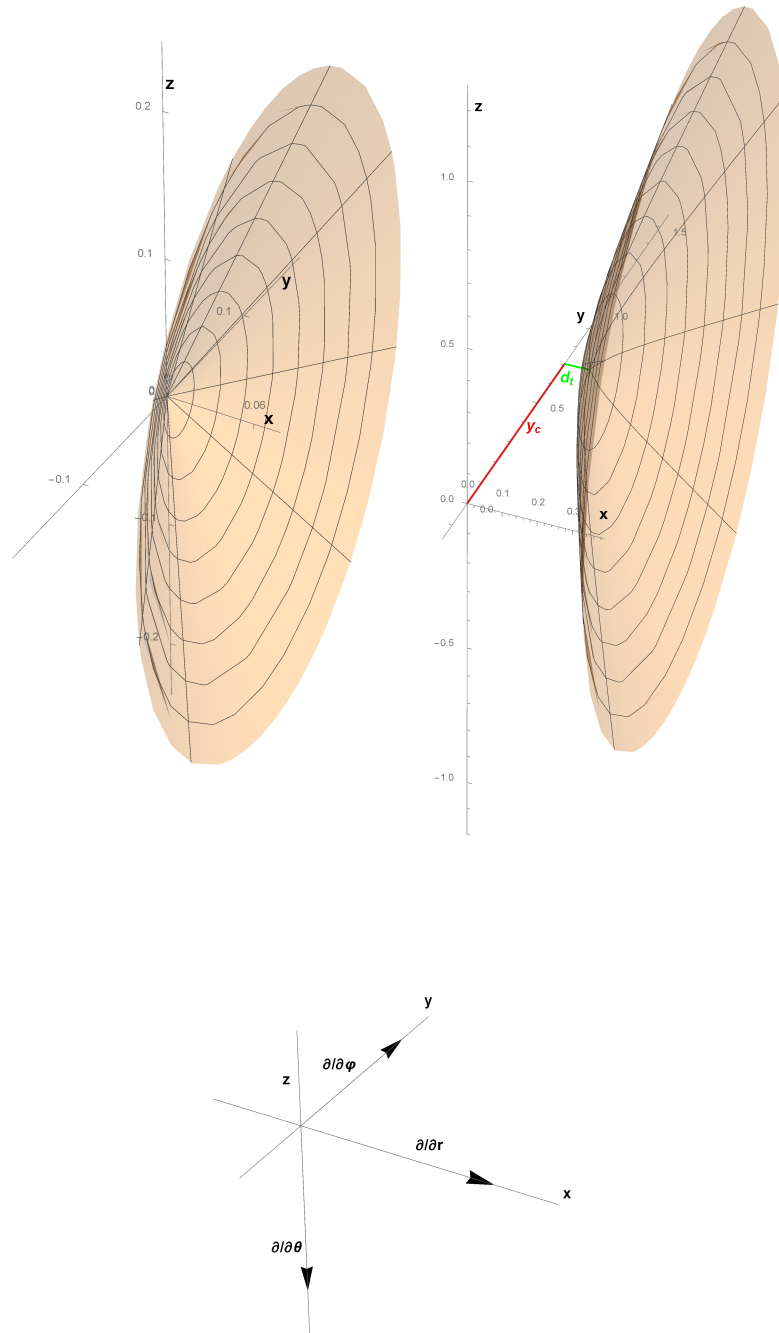
Uhol η_1 tak reprezentuje súradnicový uhol medzi priamkami, ktoré vzniknú prienikom svetelného kuželu s nadplochou $t, \varphi = \text{konšt.}$ prechádzajúcou vrcholom kuželu. Uhol η_2 podobne reprezentuje súradnicový uhol medzi priamkami, ktoré vzniknú prienikom svetelného kuželu s nadplochou $t, \theta = \text{konšt.}$ prechádzajúcou vrcholom kuželu. Zatiaľ čo η_2 nezávisí na uhle θ , uhol η_1 na ňom závisí a platí $\eta_2 = \eta_1|_{\theta=0}$.

Z obr. 3.8 vidíme, že svetelný kužel je tesne pod horizontom udalostí prakticky rovnou plochou. So zmenšujúcim sa r sa svetelný kužel zužuje a rastie rozdiel medzi η_1 a η_2 , čím sa kužel zároveň sploštuje v smere y . Po dosiahnutí minima, ktoré je pre malé hodnoty parametru a blízko vnútorného horizontu udalostí, sa kužel začne opäť rozširovať.

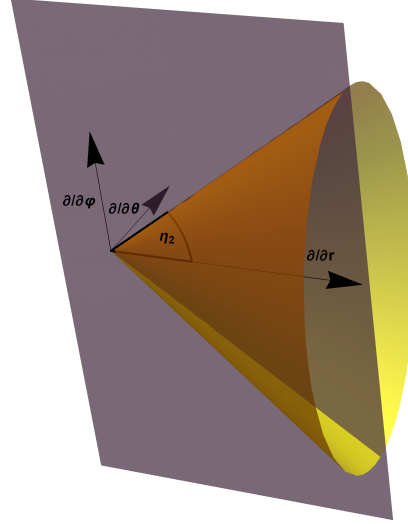
Prienik svetelného kuželu s nadplochou $t = \delta t$ je podobne ako pulzy analyzované nad horizontom udalostí stočený v smere y (obr. 3.6 vpravo). Veľkosť posunutia je dána hodnotou y_c definovanou rovnicou (3.36) a vyobrazenou v obrázku 3.6. Odtiaľ vidieť, že stáčanie pre veľké hodnoty parametru a narastá až pod vnútorný horizont udalostí. Naopak, pre malé a toto narastanie dosiahne svojho maxima medzi horizontmi udalostí.

Zaujímavá je ešte súradnicová vzdialenosť bodu x_c od svetelného kuželu (d_t v obr. 3.6 vpravo). Tú dostaneme pre parameter $\gamma = 1$ v rovnicach (3.27)-(3.29):

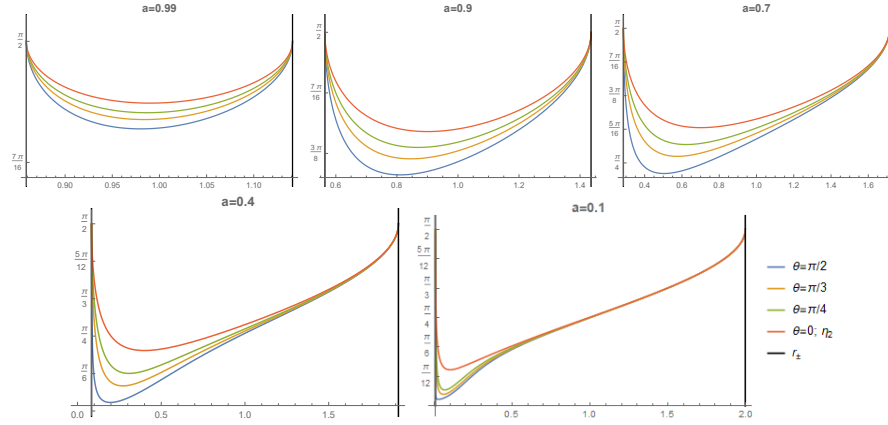
$$d_t = T_t \sqrt{\frac{-\Delta_r}{r^2 + a^2}} \quad (3.42)$$



Obr. 3.6: Reštrikcia svetelného kuželu v bode $r = 1m \in (r_-, r_+)$ s $a = 0.9m$ v ekvatoriálnej rovine na nadploche $t = 0$ (vľavo) a na nadploche $t = \delta t$ (vpravo). Dole je znázornený vzťah BL smerov a súradníc (a, y, z)



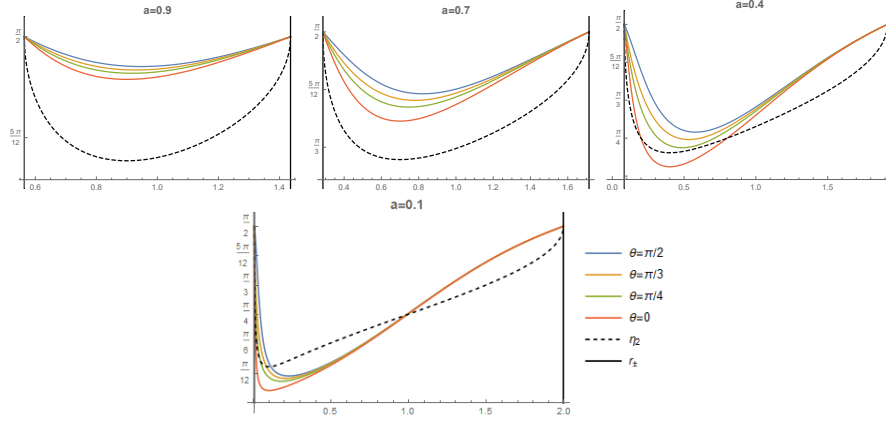
Obr. 3.7: Znázornenie súradnicového uhlu η_2 definovaného priesečníkom svetelného kuželu s rovinou $\theta = \text{konšt.}$ prechádzajúcou jeho vrcholom a osou zrkadlovej symetrie kuželu v smere $\partial/\partial r$. Analogicky pre η_1 . Súradnicové uhly η_1 a η_2 vyjadrujú minimálny a maximálny uhol pre priesečník s ľubovoľnou nadplochou prechádzajúcou vrcholom kuželu a osou symetrie kuželu.



Obr. 3.8: Závislosť uhlu η_1 vyjadrujúceho súradnicový sklon kuželu na nadploche $t, \varphi = \text{konšt.}$ na $r \in (r_-, r_+)$ pre rôzne hodnoty parametrov a a θ_0 . Pre uhol η_2 , vyjadrujúci súradnicový sklon kuželu na nadploche $t, \theta = \text{konšt.}$, platí $\eta_2 = \eta_1|_{\theta=0}$.

a udáva súradnicový sklon svetelného kuželu v smere osy t . Tj. uhol η_3 môžeme definovať ako $\tan \eta_3 = 1/d_t$.

Z obrázku 3.9 vidíme, že súradnicový uhol kuželu na nadploche $\varphi, \theta = \text{konšt.}$ je v okolí vonkajšieho horizontu udalostí väčší než uhol na nadploche $\theta = \text{konšt.}$ Pre malé hodnoty rotačného parametru a potom uhol rýchlo klesá až v blízkosti vnútorného horizontu udalostí dosiahne svoje minimum, ktoré je nižšie než v prípade uhlu η_2 a následne smerom k $r = 0$ rastie do hodnoty $\eta_3 = \pi/2$. Pri náraste hodnoty parametru a sa však toto minimum zväčšuje a posúva smerom k hodnote $r = (r_+ + r_-)/2$. Pre veľmi vysokú rotáciu čiernej diery je uhol kuželu na nadploche $\varphi, \theta = \text{konšt.}$ omnoho vyšší než na nadploche $t, \theta = \text{konšt.}$



Obr. 3.9: Závislosť uhlu η_3 , vyjadrujúceho súradnicový sklon kuželu na nadploche $\theta, \varphi = \text{konšt.}$ na $r \in (r_-, r_+)$ pre rôzne hodnoty parametrov a a θ_0 a porovnanie s uhlom η_2 , ktorý vyjadruje súradnicový sklon kuželu na nadploche $t, \theta = \text{konšt.}$

Pod vnútorným horizontom udalostí

Na tejto oblasti sa plocha stáva opäť priestorupodobnou a oblasť v kauzálnom kontakte s bodom x_0 možno opäť chápať ako svetelný pulz podobne ako tomu bolo pre $r > r_+$. Tieto sú pre ekvatoriálnu rovinu vyobrazené v obrázku 3.10a, kde však pre prehľadnosť nie je vyobrazená hodnota súradnice y_c centrálneho bodu pulzu. Táto súradnica je vykreslená v obrázku 3.3 a zvolna rastie do hodnoty $y_c = 1$.

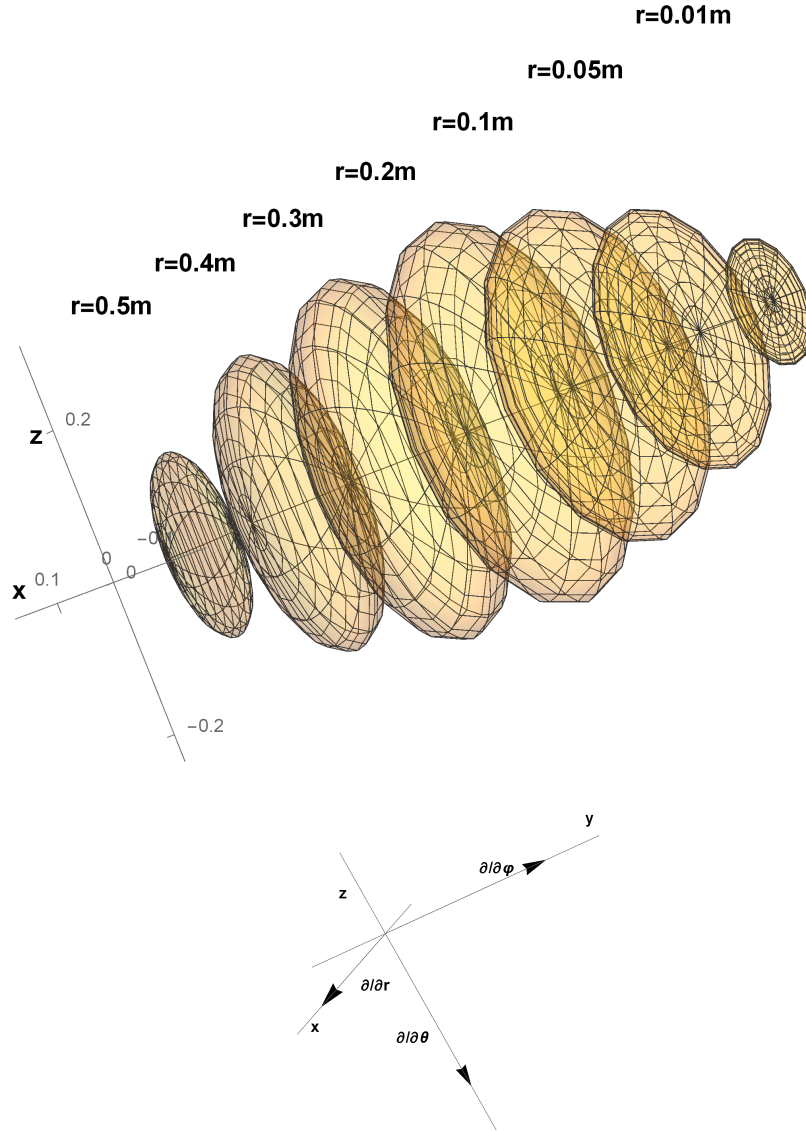
Z obrázku 3.10a vidno, že tesne pod vnútorným horizontom udalostí je pulz sploštený v smere $\partial/\partial r$ (odpovedajúceho v ekvatoriálnej rovine smeru $\partial/\partial x$). Smerom k singularite sa pulz začína splošťovať v smere $\partial/\partial \varphi$ odpovedajúceho smeru $\partial/\partial y$ a naopak, sploštenie v smere $\partial/\partial r$ sa znižuje. Zdanlivá súradnicová veľkosť pulzu taktiež smerom od vnútorného horizontu udalostí v smere klesajúcej súradnice r narastá a následne klesá smerom k singularite do nuly.

Pre všeobecný uhol θ však možno očakávať iné správanie pulzu, keďže tentokrát hodnota súradnice $r = 0$ neodpovedá singularite. Tento prípad je vyobrazený v obrázku 3.10b pre uhol $\theta = \pi/4$. Pulz je tesne pod vnútorným horizontom udalostí naďalej sploštený v smere $\partial/\partial r$ (tentokrát daného lineárnou kombináciou smerov $\partial/\partial x$ a $\partial/\partial z$), no smerom k $r = 0$ jeho zdanlivá súradnicová veľkosť neustále narastá a splošťovanie klesá.

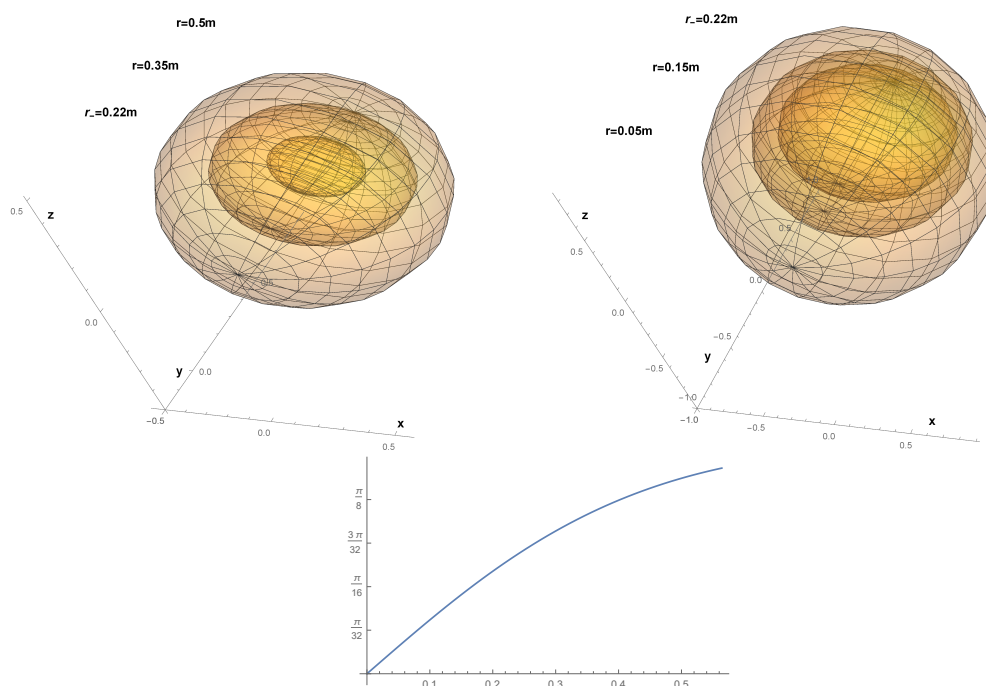
Na tejto oblasti možno rovnako ako tomu bolo pre $r > r_+$ zaviesť veličiny d_r , d_y a d_θ spĺňajúce vzťahy (3.37)-(3.39), v ktorých bude správanie pulzu lepšie viditeľné.

Tieto veličiny sú vyobrazené v obrázku 3.11a pre ekvatoriálnu rovinu a pre rôzne hodnoty parametru a . Z grafov skutočne vidieť, že súradnicová veľkosť pulzu smerom od horizontu udalostí k singularite najskôr narastá a potom klesá do nuly. Taktiež vidno, že tesne pod horizontom udalostí je pulz sploštený v prvom rade v smere $\partial/\partial r$ odpovedajúceho hrúbke pulzu (d_r), no toto sploštenie klesá až sploštenie v smere $\partial/\partial \varphi$ (d_y) výrazne prevládne. To taktiež vidieť z obrázku 3.11c vľavo, na ktorom je vyobrazená závislosť d_r/d_y na r pre rôzne hodnoty parametru a .

Ako bolo spomínané, mimo ekvatoriálnu rovinu je situácia iná. Pre $\theta = \pi/4$



Obr. 3.10a: Oblasť nadplochy $t = \delta t$ v kauzálnom kontakte s bodom x_0 ležiacom v ekvatoriálnej rovine pre $r > r_+ \doteq 1.4359m$ a $a = 0.9m$ s ergosférou na $r = 2m$. Túto oblasť je možné interpretovať ako tvar svetelného pulzu vyslaného z bodu x_0 a meraného ZAMO pozorovateľom na danej nadploche $r, \theta = \text{konšt}$. Súradnice x , y a z sú centrovane na bod x_0 a preškálované parametrom δt oproti čiarkovaným súradniciam zavedeným rovnicami (3.33)-(3.35). Každý pulz v obrázkoch odpovedá inej voľbe hodnoty súradnice r , z ktorej bol pulz vyslaný, ako je uvedené v popiskoch. Dole sú uvedené pôvodné BL smery. Pre prehľadnosť nie je vyobrazená hodnota súradnice y_c centrálnneho bodu pulzu a tak z obrázku vidno len súradnicové rozmery pulzu a nie ich presné umiestnenie v smere súradnice y . Toto umiestnenie možno vyčítať z obrázku 3.3. Z obrázku vidieť, že pulz začína tesne pod vnútorným horizontom udalostí sploštený v smere $\partial/\partial r$. Smerom k singularite sa toto sploštenie znižuje a začína sa splošťovať v smere $\partial/\partial \varphi$ až v okolí singularity toto sploštenie začne dominovať. Pulz sa následne znižuje do nulových súradnicových rozmerov.

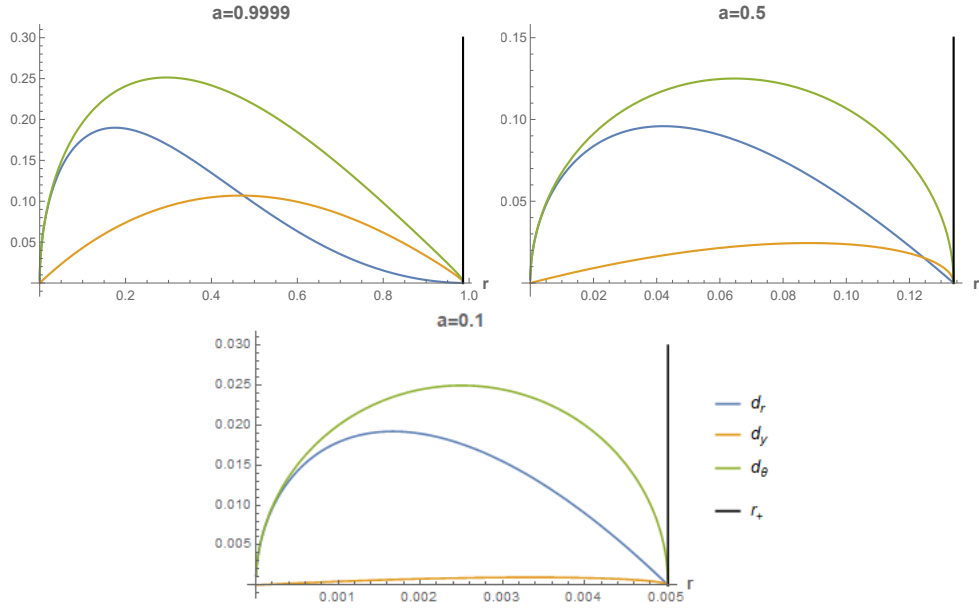


Obr. 3.10b: Tvar pulzu na nadplochách s $\theta = \pi/4$. BL smer $\partial/\partial\varphi$ naďalej odpovedá smeru súradnice y , no smery $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\theta$ sú dané lineárnou kombináciou smerov $\partial/\partial x$ a $\partial/\partial z$, závislou na hodnote súradnice r bodu x_0 . Uhol medzi $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial z$ je vyobrazený dole, vektor $\partial/\partial\theta$ potom bude kolmý na vektory $\partial/\partial r$ a $\partial/\partial\varphi$. Z obrázku vidno, že tesne pod vnútorným horizontom udalostí je pulz sploštený v smere $\partial/\partial r$ a smerom k singularite sa toto sploštenie vyrovnáva. Na rozdiel od ekvatoriálnej roviny sa však nezačne splošťovať v smere $\partial/\partial\varphi$. Pulz taktiež najskôr rastie a následne začne jeho súradnicová veľkosť klesať do nuly.

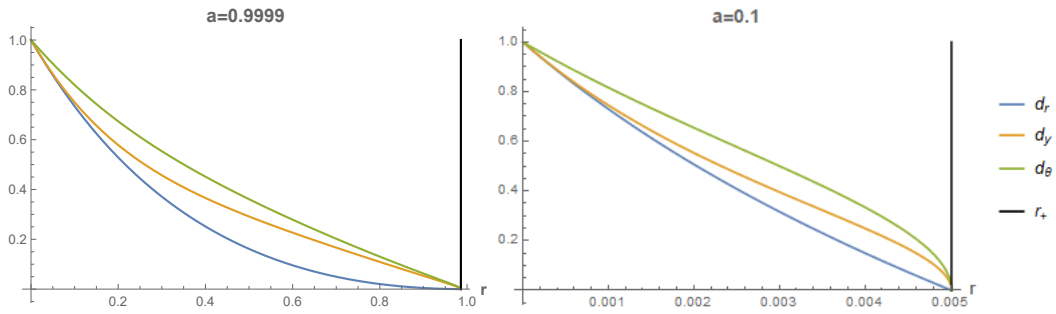
sú veličiny vyobrazené v obrázkoch 3.11b a 3.11c vpravo. Z nich vidieť, že súradnicová veľkosť pulzu narastá a sploštenie, ktoré je neustále v smere $\partial/\partial r$ sa znižuje až pre $r = 0$ podobne ako pre $r \rightarrow \infty$ dostaneme pulz sféricky symetrický.

Keďže kvalitatívny rozdiel medzi ekvatoriálnou rovinou a všeobecnou hodnotou súradnice θ je značný, vyobrazili sme závislosť veličín (d_r, d_y, d_θ) na r pre ekvatoriálnu rovinu a uhol $\theta = 1.05\pi/2$ v obrázku 3.11d.

Odtiaľ vidno, že pre a blízke maximálnej hodnote 1 je závislosť pod horizontom udalostí veľmi podobná medzi oboma uhlami. V blízkosti singularity sa však, ako sa dalo čakať, závislosti výrazne rozchádzajú. So zmenšujúcim parametrom a sa závislosti rozchádzajú čoraz bližšie horizontu udalostí, resp. závislosti sa rozchádzajú s rozdielom uhlov θ čoraz viac. To možno chápať tak, že pre malé hodnoty parametru a je vnútorný horizont udalostí čoraz bližšie k singularite a teda jej vplyv na okolie vnútorného horizontu udalostí narastá.



Obr. 3.11a: Závislosť veličín d_r , d_y a d_θ na r v ekvatoriálnej rovine pod vnútorným horizontom udalostí a pre rôzne hodnoty parametru a , vyjadrené v jednotkách m . Veličiny vyjadrujú súradnicové rozmery pulzu po rade v smeroch $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\varphi$ a $\partial/\partial\theta$ podľa rovníc (3.37)-(3.39). Z obrázkov vidieť, že súradnicová veľkosť pulzu smerom od vnútorného horizontu udalostí k singularite najskôr narastá a potom klesá do nuly. Taktiež pre väčšie hodnoty parametru a vidno, že tesne pod horizontom udalostí je pulz sploštený v prvom rade v smere $\partial/\partial r$ odpovedajúceho hrúbke pulzu (d_r), no toto sploštenie klesá až sploštenie v smere $\partial/\partial\varphi$ (d_y) výrazne prevládne.

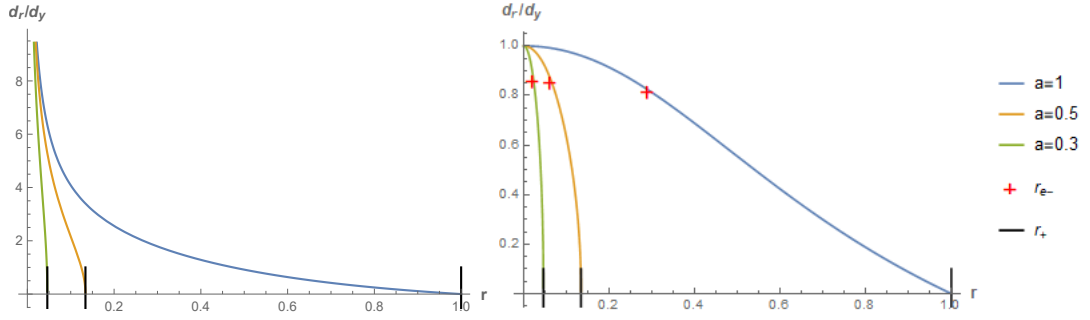


Obr. 3.11b: Závislosť veličín d_r , d_y a d_θ na r pre $\theta = \pi/4$. Na rozdiel od ekvatoriálnej roviny sa pulz smerom k singularite neustále zväčšuje a sploštenie vyrovnáva až limitne pre singularitu dostaneme súradnicovú sféru o polomere 1.

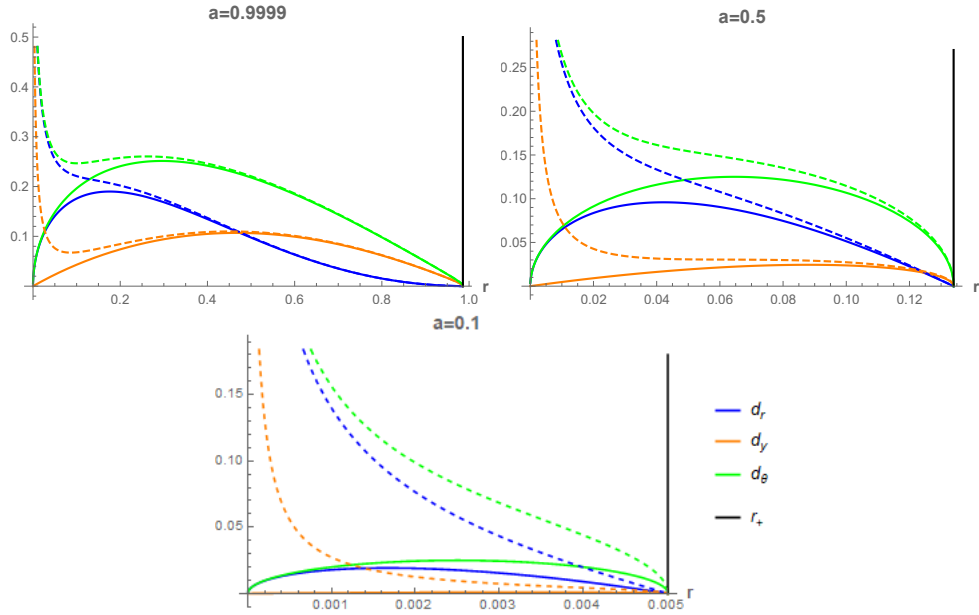
3.2 Konformný diagram

3.2.1 Hľadanie nadplochy

Ako bolo spomínané, na konštrukciu konformného diagramu potrebujeme nájsť vhodnú časupodobnú dvojrozmernú nadplochu. Zavedením súradníc Eddington-Finkelsteinového typu, ktoré sa používajú na rozšírenie priestoročasu cez ho-



Obr. 3.11c: Závislosť veličiny d_r/d_y na r pod vnútorným horizontom udalostí. Vľavo v ekvatoriálnej rovine a vpravo pre uhol $\theta = \pi/4$.



Obr. 3.11d: Závislosť veličín d_r , d_y a d_θ na r v ekvatoriálnej rovine (celá čiara) a pre $\theta = 1.05\pi/2$ (čiarkovaná čiara) pod vnútorným horizontom udalostí. Z obrázku vidieť rozdiel v okolí $r = 0$ pre ekvatoriálnu rovinu a nadplochu $\theta = \text{konšt.}$ kúsok od nej.

rizont udalostí

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta_r} dr, \quad (3.43)$$

$$d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta_r} dr, \quad (3.44)$$

dostaneme metriku v tvare

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\varrho} \right) (dv - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + 2 (dv - a \sin^2 \theta d\phi) (dr - a \sin^2 \theta d\phi) + \varrho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.45)$$

Indukovaná metrika na nadplochách konštantných hodnôt súradníc θ a ϕ je

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\varrho} \right) dv^2 + 2dvdr \quad (3.46)$$

a spočítaním determinantu sa možno presvedčiť, že sa skutočne jedná o časupodobnú nadplochu. Prienik nadplochy s horizontmi udalostí však nie je nulovou krivkou ako by sme na konformný diagram rešpektujúci kauzálnu štruktúru potrebovali. Vektor dotyčnicový ku krivkám $r = \text{konšt.}$, tj. $\partial/\partial v$, má normu

$$\left| \frac{\partial}{\partial v} \right|^2 = -\frac{\Delta_r - a^2 \sin^2 \varphi}{\varrho} \quad (3.47)$$

a je nulový na ergosférach, priestorupodobný medzi nimi a časupodobný nad vonkajšou a pod vnútornou ergosférou. Na konštrukciu konformného diagramu, rešpektujúcu kauzálnu štruktúru, tak tieto nadplochy nie sú vhodné.

Najjednoduchšia možnosť je nesnažiť sa konštruovať konformný diagram pre celý priestoročas, ale len v okolí horizontu udalostí, kde je kauzálna štruktúra najzaujímavejšia. Zavedením súradnice

$$\hat{\phi}_{\pm} = \varphi - \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} t \quad (3.48)$$

adaptovanej na vonkajší, resp. vnútorný horizont udalostí, dostaneme nadplochy $\hat{\phi}_{\pm}, \theta = \text{konšt.}$, ktoré sú časupodobné na nejakom okolí daného horizontu udalostí. Význam takto zavedenej súradnice je ten, že metrika v súradniciach $(t, r, \theta, \hat{\phi}_{\pm})$ je v limite na príslušnom horizonte udalostí diagonálna, a teda tvar svetelných kužeľov bude na horizonte udalostí jednoduchý. Na blízkom okolí príslušného horizontu bude potom metrika takmer diagonálna a teda diagram skonštruovaný analogicky konformnému diagramu skonštruovanému pre Reissnerovú-Nordströmovú čiernu dieru bude mať v blízkom okolí horizontu udalostí približne rovnaký význam. Diagram však skonštruujeme pre celú oblasť, na ktorej bude nadplocha konštantných hodnôt uhlových súradníc časupodobná. Ukáže sa, že pre parameter a dostatočne menší než parameter m bude v časupodobnej oblasti ležať aj ergosféra.

3.2.2 Konformný diagram v okolí vonkajšieho horizontu udalostí

Transformácie súradníc

Zavedme súradnicu (3.48) pre vonkajší horizont udalostí. Pre jednoduchosť značenia vynechajme index a súradnicu označme jednoducho $\hat{\phi}$. Metrika potom dostane tvar

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\varrho^2} \left(\frac{\varrho_+^2}{\Lambda_{r+}} dt - a \sin^2 \theta d\hat{\phi} \right)^2 + \frac{\varrho^2}{\Delta_r} dr^2 + \varrho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\varrho^2} \left(a \frac{r_+^2 - r^2}{\Lambda_{r+}} dt - \Lambda_r d\hat{\phi} \right)^2, \quad (3.49)$$

kde sme označili

$$\Lambda_r = r^2 + a^2, \quad (3.50)$$

$$\Lambda_{r+} = r_+^2 + a^2, \quad (3.51)$$

$$\varrho_+^2 = r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (3.52)$$

Označme metrické koeficienty

$$\hat{g}_{tt} = -\frac{\Delta_r}{\varrho^2} \frac{\varrho_+^4}{\Lambda_{r_+}^2} + a^2 \frac{\sin^2 \theta}{\varrho^2} \frac{(r_+^2 - r^2)^2}{\Lambda_{r_+}^2}, \quad (3.53)$$

$$\hat{g}_{rr} = \frac{\varrho^2}{\Delta_r}, \quad (3.54)$$

$$\hat{g}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\frac{\Delta_r}{\varrho^2} a^2 \sin^4 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\varrho^2} \Lambda_r^2, \quad (3.55)$$

$$\hat{g}_{t\hat{\phi}} = 2 \left(\Delta_r \varrho_+^2 - (r_+^2 - r^2) \Lambda_r \right) \frac{a \sin^2 \theta}{\varrho^2 \Lambda_{r_+}}. \quad (3.56)$$

Potom indukovaná metrika na nadploche $\hat{\phi}, \theta = \text{konšt.}$ bude

$$ds^2 = -\hat{g}_{tt} \left[-dt^2 + \frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}} dr^2 \right]. \quad (3.57)$$

Nadplocha je určite časupodobná pod vonkajším horizontom, keďže na tejto oblasti je $\Delta_r < 0$ a \hat{g}_{tt} je kladné. Nad horizontom udalostí potrebujeme pre časupodobnosť nadplochy aby platilo

$$-\Delta_r \varrho_+^4 + a^2 \sin^2 \theta (r_+^2 - r^2)^2 < 0, \quad (3.58)$$

čo je polynóm štvrtého rádu v r . Jeden koreň tohto polynómu je $r = r_+$ a predeľením $r - r_+$ dostaneme nad horizontom udalostí podmienku pre polynóm tretieho rádu v r

$$-(r - r_-) \varrho_+^4 + a^2 \sin^2 \theta (r^2 - r_+^2) (r_+ + r) < 0. \quad (3.59)$$

Koreň rovnice (3.59) nad vonkajším horizontom udalostí označme r_0 . Ten závisí na hodnote súradnice θ . Hľadáme hodnotu θ , pre ktorú polynóm nadobúda pre dané r maximálne hodnoty, tj. pre ktorú je r_0 minimálne. Tým môžeme nájsť maximálnu hodnotu súradnice r , pre ktorú bude nadplocha časupodobná bez ohľadu na hodnotu súradnice θ .

Deriváciou ľavej strany (3.59) podľa θ dostaneme

$$a^2 \sin(2\theta) \left[2(r - r_-) \varrho_+^2 + (r^2 - r_+^2) (r_+ + r) \right],$$

čo je očividne nulové v ekvatoriálnej rovine, tj. pre $\theta = \pi/2$. Zátvorka je určite kladná v ekvatoriálnej rovine kde $\varrho_+^2 = r_+^2$ a smerom k ose symetrie rastie s tým ako rastie ϱ_+^2 , takže táto byť nulová nemôže. Máme tak extrém v ekvatoriálnej rovine a že sa jedná o maximum sa možno presvedčiť tým, že derivácia je kladná pre $\theta < \pi/2$ a záporná pre $\theta > \pi/2$.

Časupodobnosť v ekvatoriálnej rovine je daná hodnotami r , pre ktoré je výraz (3.59) záporný. Riešením kubickej rovnice získame koreň

$$r_{0min} \equiv -\frac{r_+}{2} \left(1 - \sqrt{5 + 4 \frac{r_+}{r_-}} \right). \quad (3.60)$$

Nadplocha bude teda určite časupodobná na oblasti $(r_-, r_{0min}) \subset (r_-, r_0)$.

Radi by sme v konformnom diagrame mali zahrnutú aj ergosféru, tj. zaujíma nás pre aké hodnoty parametrov čiernej diery platí $r_{0_{min}} > r_{e+}$. Rovnosť nastáva pre $a_0 \equiv m\sqrt{2\sqrt{2}-1} \doteq 0.91m$. r_0 je pre dané m klesajúcou funkciou parametru a , takže konformný diagram bude zahŕňať ergosféru pre všetky hodnoty súradnice θ pre hodnoty parametru $a < a_0$. Obmedzme sa tým pádom len na množinu parametrov, pre ktoré $a < 0.9m$.

V analógií s RN zavedme na oblasti $r \in (r_-, r_0)$ korytnačiu súradnicu, splňajúcu vzťah

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \text{sgn}(r - r_+) \sqrt{\frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}}}, \quad (3.61)$$

pomocou ktorej získame indukovanú metriku na nadploche v tvare

$$ds^2 = -\hat{g}_{tt} (-dt^2 + d\rho^2). \quad (3.62)$$

Ďalej zavedme súradnice (1.8)-(1.13), čím dostaneme metriku

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\hat{g}_{tt} \frac{-4\delta^2}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})} (-d\hat{\tau}^2 + d\hat{\rho}^2) + \left(\varrho^2 - \hat{g}_{tt} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta^2 + \\ & + \hat{g}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} d\hat{\phi}^2 - \hat{g}_{t\hat{\phi}} \frac{4\delta}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})} (\cos \hat{\tau} \sin \hat{\rho} d\hat{\tau} - \cos \hat{\rho} \sin \hat{\tau} d\hat{\rho}) d\hat{\phi} + \\ & + \hat{g}_{tt} \frac{4\delta}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (\cos \hat{\tau} \sin \hat{\rho} d\hat{\rho} - \cos \hat{\rho} \sin \hat{\tau} d\hat{\tau}) d\theta \end{aligned} \quad (3.63)$$

a v ktorých už možno konformný diagram vykresliť.

Hladkosť metriky

Aby sme mohli skonštruovať konformný diagram, potrebujeme ukázať hladkosť metrických koeficientov. Jediné potenciálne divergentné členy z metriky (3.63) na horizonte udalostí sú členy

$$\frac{\hat{g}_{tt}}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})} \quad (3.64)$$

a

$$\frac{\hat{g}_{t\hat{\phi}}}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})}. \quad (3.65)$$

Pokiaľ vyjmemme nulový člen, môžeme písať

$$\hat{g}_{tt} = (r - r_+) A_{tt}(r, \theta), \quad (3.66)$$

$$\hat{g}_{t\hat{\phi}} = (r - r_+) A_{t\hat{\phi}}(r, \theta), \quad (3.67)$$

kde

$$A_{tt} = -\frac{r - r_-}{\varrho^2} \frac{\varrho_+^4}{\Lambda_+^2} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\varrho^2} \frac{r^2 - r_+^2}{\Lambda_+^2} (r + r_+), \quad (3.68)$$

$$A_{t\hat{\phi}} = \frac{a \sin^2 \theta}{\varrho^2 \Lambda} \left[(r - r_-) \varrho_+^2 + (r + r_+) \Lambda_+ \right]. \quad (3.69)$$

Funkcia A_{tt} je nenulová a konečná na oblasti $r_- < r < r_0$ a funkcia $A_{t\hat{\phi}}$ je konečná a nenulová všade mimo os symetrie. Pre korytnačiu súradnicu môžeme písať

$$\begin{aligned}\rho &= \int_{r_0}^r \operatorname{sgn}(r - r_+) \sqrt{\frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}}} dr = \int_{r_0}^r \frac{\operatorname{sgn}(r - r_+)}{|r - r_+|} \sqrt{\frac{-\varrho^2}{(r - r_-) A_{tt}(r, \theta)}} dr \equiv \\ &\equiv \int_{r_0}^r \frac{A_\rho(r, \theta)}{r - r_+} dr.\end{aligned}\quad (3.70)$$

Funkciu A_ρ si rozdelíme na

$$A_\rho(r, \theta) = A_\rho(r_+, \theta) + (A_\rho(r, \theta) - A_\rho(r_+, \theta)) \equiv \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} + l_\rho(r, \theta), \quad (3.71)$$

kde funkcia l_ρ je nulová na horizonte udalostí. Spočítajme limitu

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{l_\rho(r, \theta)}{r - r_+} = \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{-2r(r - r_-) A_{tt} + \varrho^2 \left(A_{tt} + (r - r_-) \frac{dA_{tt}}{dr} \right)}{2\sqrt{-\varrho^2 (r - r_-)^3 A_{tt}^3}}, \quad (3.72)$$

kde sme využili L'Hospitalovo pravidlo. Limity všetkých členov okrem derivácie A_{tt} sú jasne konečné. Zderivovaním sa dá presvedčiť, že konečná je aj derivácia A_{tt} , čo možno ľahko vidieť aj z faktu, že táto funkcia je podielom polynómu s ϱ^2 a teda nie je možné, aby sa derivovaním vo výraze objavil divergentný člen.

Keďže limita je konečná, bude určitý integrál na okolí horizontu udalostí tak-tiež konečný. Pre korytnačiu súradnicu tak môžeme písať

$$\rho = r_+ \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-} \log |r - r_+| + L_\rho(r, \theta), \quad (3.73)$$

kde L_ρ získame integráciu $l_\rho / (r - r_+)$.

Majúc korytnačiu súradnicu v tomto tvare bude postup pre ukázanie hladkosti analogický tomu z RN. Využijeme vzťah

$$e^\rho = \left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^\delta, \quad (3.74)$$

z ktorého dostaneme:

$$r - r_+ = \operatorname{sgn}(r - r_+) \left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^{\frac{\delta}{r_+} \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-}} e^{-L_\rho}. \quad (3.75)$$

Dosadením do (3.66) a následne do (3.64) dostaneme

$$\frac{\hat{g}_{tt}}{\sin(\hat{\tau} - \hat{\rho}) \sin(\hat{\tau} + \hat{\rho})} = \operatorname{sgn}[(r - r_+) \hat{u} \hat{v}] \frac{\left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|^{\frac{\delta}{r_+} \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} - 1}}{4 \cos^2 \frac{\hat{u}}{2} \cos^2 \frac{\hat{v}}{2}} A_{tt} e^{-L_\rho}. \quad (3.76)$$

Problémový člen na pravej strane v prvom riadku je podobný tomu z (1.20) a teda z rovnakého dôvodu je metrika hladká a nenulová pre

$$\delta = r_+ \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-} \quad (3.77)$$

v prípade, že funkcia $r(\hat{\tau}, \hat{\rho}, \theta)$ je hladká. Pre (3.65) dostaneme ten istý výraz až na člen A_{tt} , miesto ktorého bude člen $A_{t\hat{\phi}}$.

Upravme (3.75) a dosadíme (3.77)

$$\left(1 - \frac{r}{r_+}\right) \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{r}{r_+}\right) e^{L_\rho + \log r_+} = \left| \tan \frac{\hat{u}}{2} \tan \frac{\hat{v}}{2} \right|. \quad (3.78)$$

Môžeme použiť rovnaký postup ako sme použili u Schwarzschildovej čiernej diery, tj. ak prvá derivácia je nenulová a konečná a zvyšné derivácie sú konečné, bude funkcia hladká. Pre prvú deriváciu platí

$$\frac{d}{dr} (r - r_+) e^{L_\rho} = e^{L_\rho} (1 + l_\rho), \quad (3.79)$$

čo je na horizonte udalostí nenulové a konečné.

Ukážme ďalej, že všetky derivácie ľavej strany rovnice (3.74) podľa r sú na horizonte udalostí konečné. Ak n -tá derivácia dá výsledok

$$\frac{d^n}{dr^n} (r - r_+) e_\rho^L = e_\rho^L C_n, \quad (3.80)$$

potom $n+1$ derivácia dá

$$\frac{d^{n+1}}{dr^{n+1}} (r - r_+) e_\rho^L = e_\rho^L \left(\frac{l_\rho}{r - r_+} C_n + \frac{dC_n}{dr} \right). \quad (3.81)$$

Prvý člen v zátvorke je konečný v prípade, že C_n je konečné a ostáva ukázať, že to isté platí aj pre druhý člen. Druhá derivácia:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r - r_+) e_\rho^L = e_\rho^L \left(\frac{l_\rho}{r - r_+} (1 + l_\rho) + \frac{dl_\rho}{dr} \right). \quad (3.82)$$

Lubovoľná derivácia l_ρ divergenciu nevyprodukuje, pretože z (3.79), kde je uvedená prvá derivácia, a z definície A_{tt} je vidieť, že ďalším derivovaním sa do menovateľa nulový člen nedostane. Jediná možnosť divergencie je derivácia člena

$$\frac{l_\rho}{r - r_+}. \quad (3.83)$$

Pokiaľ ukážeme, že všetky derivácie tohto člena sú na horizonte udalostí konečné, dokázali sme hladkosť metriky.

Spočítajme prvú deriváciu a urobme limitu

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\partial}{\partial r} \frac{l_\rho}{r - r_+} = \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{1}{r - r_+} \left(\frac{\partial l_\rho}{\partial r} - \frac{l_\rho}{r - r_+} \right). \quad (3.84)$$

Člen v zátvorke má nulovú limitu na horizonte udalostí, čo vyplýva z L'Hospitalovho pravidla. Môžeme tak použiť L'Hospitalove pravidlo v (3.84)

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\partial}{\partial r} \frac{l_\rho}{r - r_+} = \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\partial^2 l_\rho}{\partial r^2} - \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\partial}{\partial r} \frac{l_\rho}{r - r_+}. \quad (3.85)$$

Keďže prvá limita na pravej strane je konečná, musia byť aj zvyšné.

Všetky vlastnosti l_ρ , ktoré sme použili na ukázanie konečnosti derivácie (tj. jej nulovosť na horizonte udalostí a konečnosť derivácie) spĺňa aj zátvorka na pravej strane rovnice (3.79) a teda túto zátvorku môžeme považovať za nové l'_ρ a postup opakovať ad infinitum.

Dostávame teda, že metrické koeficienty v súradniciach $(\hat{\tau}, \hat{\rho}, \hat{\phi}, \theta)$ sú regulárne na vonkajšom horizonte udalostí.

Integrácia korytnačej súradnice

Na zostrojenie diagramu potrebujeme zintegrovat korytnačiu súradnicu spĺňajúcu vzťah

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \operatorname{sgn}(r - r_+) \sqrt{\frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}}}. \quad (3.86)$$

Pravá strana diverguje pre hodnoty súradnice $r \in \{r_-, r_+, r_0\}$. Na okolí týchto hodnôt urobme rozvoj pravej strany a integrujme ho. Mimo týchto okolí použijeme numerickú integráciu.

Upravme:

$$\sqrt{\frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}}} = \frac{\varrho^2 \Lambda_{r+}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta (r - r_0)(r - r_1)(r - r_2)(r - r_-)(r - r_+)^2}}, \quad (3.87)$$

kde r_1 a r_2 sú zvyšné dva korene polynómu na ľavej strane nerovnice (3.59). Označme $p_i^j(r)$ polynóm pod odmocninou, z ktorého sme odstranili zátvorky odpovedajúce j -násobnému koreňu i . Rozvoj pre všetky tri korene, ktoré nás zaujímajú tak môžeme písať v tvare

$$\left. \sqrt{\frac{\hat{g}_{rr}}{-\hat{g}_{tt}}} \right|_{r_i+\varepsilon} = \frac{\Lambda_{r+} \varrho^2|_{r_i+\varepsilon}}{\sqrt{|\varepsilon|^j p_i^j(r_i)}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{n!} \left(\frac{p_i^j(r_i) - p_i^j(r_i + \varepsilon)}{2p_i^j(r_i)} \right)^n. \quad (3.88)$$

Vzhľadom na to, že pre korene r_0 a r_- je $j = 1$ bude integrál divergentného člena $\sim \varepsilon^{-1/2}$ konečný, naopak pre vonkajší horizontu udalostí platí $j = 2$ a teda integrál pre túto hodnotu súradnice r diverguje.

Diagram

Majúc všetky ingrediencie, môžeme vykresliť konformný diagram v okolí vonkajšieho horizontu udalostí na nadplochách $\hat{\phi}, \theta = \text{konšt.}$ Zavedením súradnice $\hat{\phi}$ meníme súradnicové vektorové pole $\partial/\partial t$ na

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{a}{a^2 + r_+^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.89)$$

takže nadplocha sa bude stáčať v uhle φ s rastúcim časom, ako je vyobrazené v obázku 3.12.

Uhol súradnicového sklonu α medzi vektormi $\partial/\partial t$ a $\partial/\partial t + a/(r_+^2 + a^2) \partial/\partial \varphi$, tj. uhol sklonu plochy $\hat{\phi} = \text{konšt.}$ v obrázku 3.12 k ose t , je daný výrazom

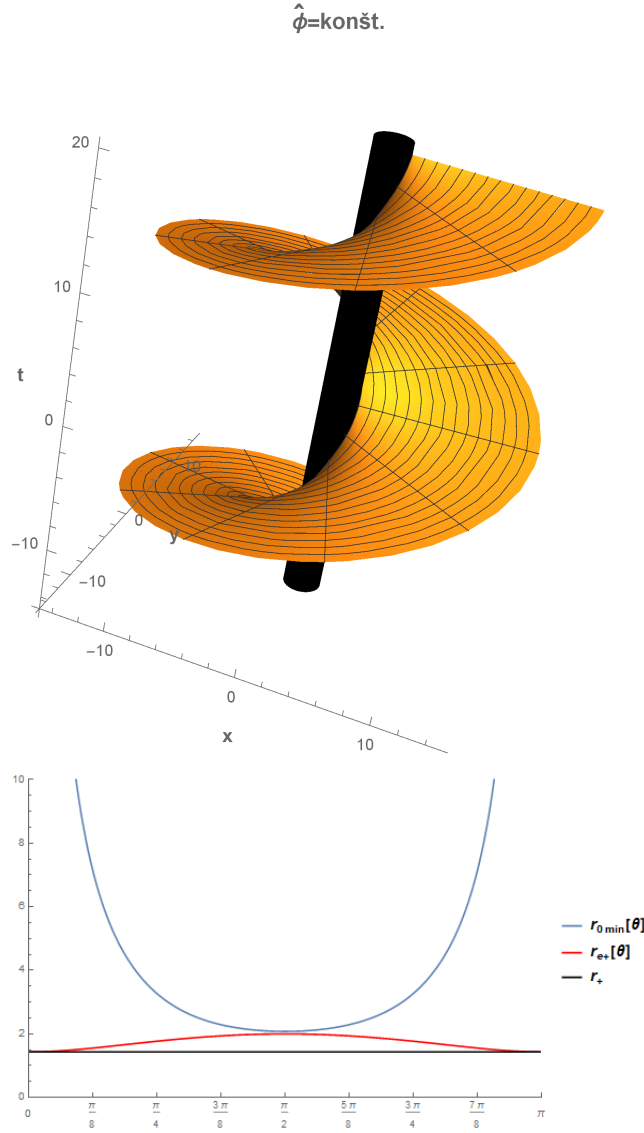
$$\tan \alpha = \frac{ra}{a^2 + r_+^2} = \frac{a}{2mr_+} r, \quad (3.90)$$

kde r je BL súradnica bodu, v ktorom sa o sklon zaujímame. Na horizonte udalostí tak dostaneme

$$\tan \alpha = \frac{a}{2m} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (3.91)$$

Na tomto intervale možno tangens s chybou menej než 10% považovať za lineárnu funkciu, takže približne môžeme na horizonte udalostí písať $\alpha \doteq \frac{a}{2m}$.

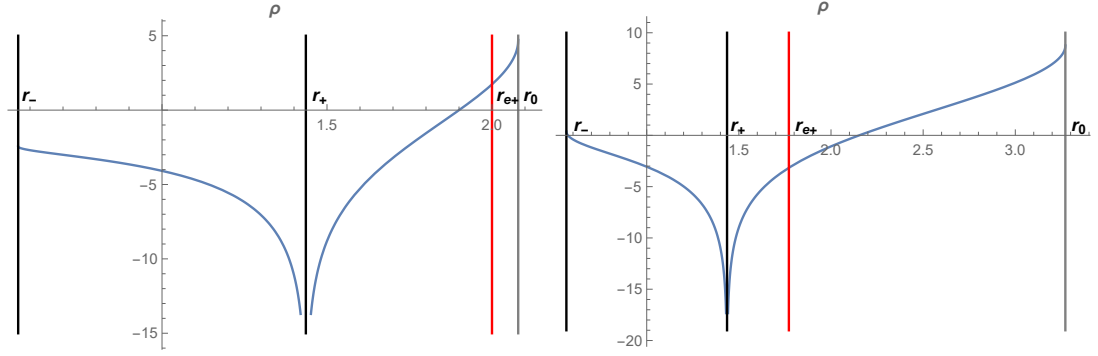
Na tejto ploche zavádzame konformné súradnice \hat{t} a $\hat{\rho}$ pomocou súradnice ρ rovnako ako v prípade Schwarzschildového riešenia, resp. RN. Diagram je tak



Obr. 3.12: Hore je zobrazená nadplocha $\hat{\phi}, \theta = \text{konšt.}$ vykreslená pre $a = 0.9$ v súradniciach ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, t$). Čierny valec znázorňuje vonkajší horizont udalostí na $r_+ \doteq 1.436$. Závislosť r_0 na θ je vyobrazená v obrázku dole. r_0 vyjadruje maximálnu hodnotu súradnice r , pre ktorú je nadplocha časupodobná. Vyjadrené v jednotkách m .

kvalitatívne rovnaký, zmenilo sa len rozloženie čiar $r = \text{konšt.}$ odpovedajúce podmienke $\rho = \text{konšt.}$ Závislosť korytnačej súradnice pre hodnotu parametru $a = 0.9m$ v ekvatoriálnej rovine a pre $\theta = \pi/4$ na r je vyobrazená v obrázku 3.13 a možno si všimnúť že kvalitatívne je táto funkcia na okolí horizontu udalostí podobná tej zo Schwarzschildového riešenia, resp. RN.

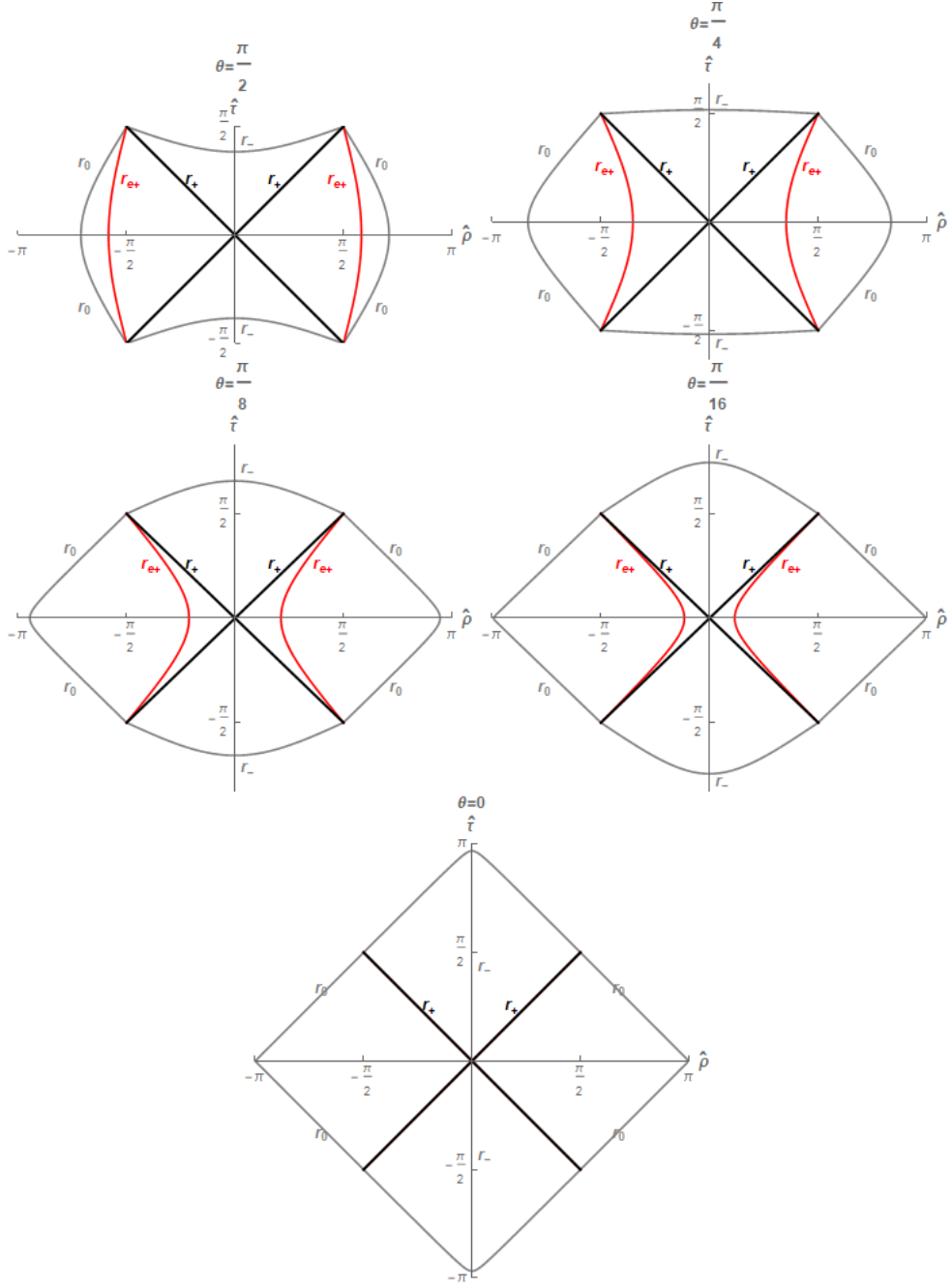
Dostávame tak konformný diagram vyobrazený na obrázku 3.14. Ako sme očakávali $\rho(r_0) \rightarrow \infty$ pre $\theta \rightarrow 0$, resp. $\theta \rightarrow \pi$ a diagram zahrňa čoraz väčšiu oblasť $r > r_+$. Podobná situácia nastáva pre $\rho(r_-)$, kde divergencia znamená, že priesečník našej nadplochy s vnútorným horizontom udalostí je nulovou a nie priestoropodobnou krivkou, ako tomu je u $\theta \notin \{0, \pi\}$. Osa symetrie ako dvojrozmerná nadplocha je dokonca všade časupodobná a navyše diagonálna, ako je hneď vidieť z metriky (3.1). Preto je možné konformný diagram skonštruovať priamo,



Obr. 3.13: Korytnačia súradnica na okolí vonkajšieho horizontu udalostí pre $a = 0.9m$. Vľavo pre ekvatoriálnu rovinu a vpravo pre $\theta = \pi/4$. Súradnice sú vyjadrené v jednotkách m .

rovnako ako tomu bolo u RN. Keďže $\sin \theta$ je na ose symetrie nulové, porovnaním metrick (3.1) a (3.49) vidíme, že dostávame rovnaké metrické koeficienty u dt^2 aj dr^2 medzi metrikou v oboch súradniciach. To znamená, že korytnačia súradnica je v oboch prípadoch zavedená rovnakým vzťahom. Pre $\theta \notin \{0, \pi\}$, konštruujeme diagram na nadplochách $\hat{\phi}_+ = \text{konšt.}$, ale súradnica $\hat{\phi}_+$ nemá na póloch zmysel. Vzhľadom na to, že korytnačie súradnice sú rovnaké, dá limita diagramu $\theta \rightarrow 0$, resp. $\theta \rightarrow \pi$ rovnaký výsledok pre $r > r_-$, než diagram skonštruovaný priamo z BL súradníc. Rovnaký výsledok by sme dostali aj pre súradnice $(t, r, \theta, \hat{\phi}_-)$ pre $r < r_+$. Spojený konformný diagram by bol teda až na hustotu súradnicových čiar $r = \text{konšt.}$ (to vyplýva z odlišnej závislosti korytnačej súradnice na súradnici r) a s tým spojenej odlišnej hodnoty parametrov δ_{\pm} , neprítomnosti singularity na $r = 0$ a prípadnej novej oblasti $r < 0$ totožný RN konformnému diagramu. Pretože ale na ose symetrie je väčšina rotačných efektov, o ktoré sa predovšetkým zaujíname, potlačená a len by sme opakovali postup a výsledky (až na mierne technické detaily) z predošlých kapitol, nebudeme sa tomuto v tejto práci bližšie venovať.

Z diagramov taktiež vidno, že ergosféra sa smerom k ose symetrie približuje k horizontu udalostí. Túto závilosť vzťahu ergosféry a horizontu udalostí na θ sme vyobrazili pomocou trojrozmerného diagramu v obrázku 3.15. Súradnica θ je v diagrame zavedená ako štandardná uhlová cylindrická súradnica. V skutočnosti však vektorové pole $\partial/\partial\theta$ nie je killingovo a teda axiálna symetria $\partial/\partial\theta$ horizontu udalostí v obrázku je zavedená umelo. Na znázornenie verného tvaru prieniku vonkajšej ergosféry a vonkajšieho horizontu udalostí s nadplochou $t, \varphi = \text{konšt.}$ spočítame a vyobrazíme aj ich vnorenie do Euklidovského priestoru v kapitole 3.3.2.

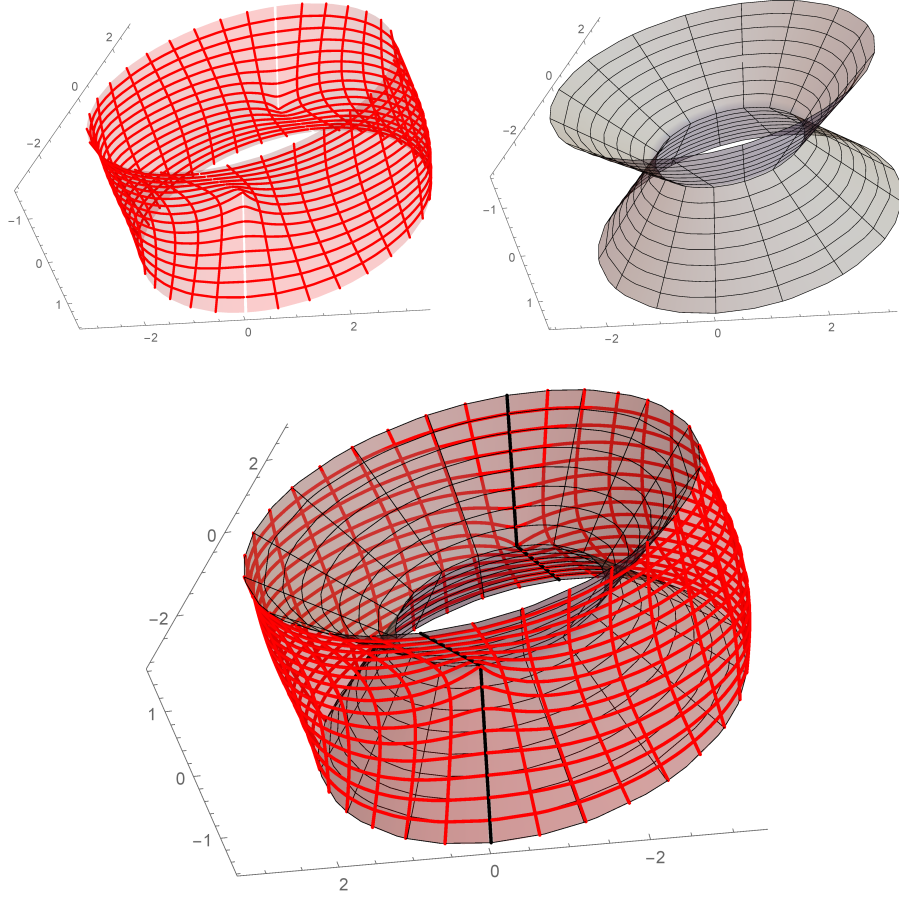


Obr. 3.14: Konformný diagram pre $a = 0.9$, $\rho_0 = 0$ a rôzne uhly θ . Na okolí horizontu udalostí sú metrické koeficienty v uvedených súradniciach takmer diagonálne, pričom na horizonte sú presne diagonálne. Na póloch (osiach symetrie Kerrovho priestoročasu) dostávame v limite diagram RN typu (dole, diagram je striktne vzato vykreslený pre θ veľmi blízke 0).

3.2.3 Kauzálny diagram pozdĺž krivky na nadplochách $\theta = \text{konšt.}$

Motivácia

Jednou z hlavných výhod konformného diagramu je tá, že kauzálnu povahu ľubovoľnej krivky ležiacej na dvojrozmerných nadplochách, na ktorých je diagram



Obr. 3.15: Vzťah (dole) ergosféry (vľavo hore) a horizontu udalostí (vpravo hore) v konformnom diagrame pre $a = 0.9$ v závislosti na uhle θ . Súradnice \hat{t} , $\hat{\rho}$ a θ sú v obrázku definované ako štandardné cylindrické súradnice. Vyjadrené v jednotkách m .

konštruovaný, je z neho ľahko poznať. Pokiaľ máme zadanú dvojdimenzionálnu časupodobnú nadplochu v Kerrovom priestoročase, môžeme konformný diagram na tejto nadploche skonštruovať analogicky Reissnerovej-Norströmovej čiernej diere tak, ako sme to urobili na okolí vonkajšieho horizontu udalostí. Problémom je voľba vhodnej časupodobnej nadplochy, ktorá by nejakým spôsobom odzrkadľovala povahu priestoročasu ako celku a nebola len náhodne zvolená. Navyše, v prípade Schwarzschildovej a Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery je metrika v konformných súradniciach $(\hat{t}, \hat{\rho}, \theta, \varphi)$ diagonálna a teda reštrikcia svetelného kuželu na podpriestor daný bázovými vektormi $\partial/\partial\hat{\rho}$, $\partial/\partial\theta$ a $\partial/\partial\varphi$ bude mať tvar elipsoidu a množstvo informácií o kauzálnej štruktúre priestoročasu je možné vyvodiť aj z tohto faktu.

Namiesto hľadania vhodnej nadplochy, zamerajme sa na samotné krivky v Kerrovom priestoročase. Skúsme skonštruovať nejaký diagram tak, aby po napaťovaní danej krivky v Kerrovom priestoročase do tohto diagramu bola kauzálna povaha krivky rovnako jednoducho viditeľná ako v prípade konformných diagramov skonštruovaných v predchádzajúcich kapitolách.

V každom bode krivky x_0 je možné zaviesť uhlovú súradnicu vzťahom (3.92) a v súradniciach $(t, r, \theta, \hat{\phi}_{x_0})$ bude metrika diagonálna pre všetky body nadplochy

$r, \theta = \text{konšt.}$ Potom môžeme skonštruovať konformný diagram na okolí bodu x_0 na nadplochách konštantných hodnôt uhlových súradníc podobne, ako sme to robili na okolí vonkajšieho horizontu udalostí v kapitole 3.2.2. Navyše v súradniciach, ktoré pre toto okolie zavedieme na konštrukciu diagramu, si metrika na nadplochách $r, \theta = \text{konšt.}$ prechádzajúcou bodom x_0 , zachová svoj diagonálny tvar. Tento diagram ďalej nazývame konformný diagram na okolí bodu x_0 a súradnice $(\hat{\tau}_{x_0}, \hat{\rho}_{x_0}, \hat{\phi}_{x_0}, \theta)$, ktoré pre tento diagram zostrojíme analogicky kapitole 3.2.2 nazývame konformné súradnice na okolí bodu x_0 . Toto môžeme urobiť pre ľubovoľný bod krivky a snaha je nejakým spôsobom spojiť tento spojte nekonečný počet diagramov pozdĺž krivky do jedného, ktorý si pozdĺž krivky zachová všetky dôležité vlastnosti metriky z pôvodných konformných diagramov na okolí bodov x_0 .

Konkrétne chceme nájsť nejaké diagramové súradnice $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}', \theta')$ výsledného kauzálného diagramu, ktoré budú až na konštantu jednoznačne dané krivkou, ktorej kauzálna štruktúra nás zaujíma. Pretože pre ľubovoľný bod krivky x_0 môžeme skonštruovať konformné súradnice v okolí bodu x_0 , ktoré sú vhodné na analýzu kauzálnej povahy krivky v bode x_0 , budeme požadovať, aby dotyčnicový vektor krivky v bode x_0 mal číselne rovnaké zložky v diagramových súradniciach $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}', \theta')$ ako aj v konformných súradniciach na okolí bodu x_0 . To chceme aby platilo pre ľubovoľnú krivku, pre jednoduchosť ležiacu na nadplochách $\theta = \text{konšt.}$ ³ Pokiaľ má totiž dotyčnicový vektor rovnaké zložky v dvoch rôznych súradniciach, je možné na výpočet normy tohto konkrétneho vektora použiť zložky metriky v ktorejkoľvek zo súradníc. Pokiaľ toto platí pre ľubovoľnú krivku, potom v danom bode môžeme použiť na spočítanie normy ľubovoľného vektora vyjadreného v diagramových súradniciach $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}', \theta')$ metrické koeficienty vyjadrené v konformných súradniciach na okolí bodu x_0 $(\hat{\tau}_{x_0}, \hat{\rho}_{x_0}, \hat{\phi}_{x_0}, \theta)$. S každým bodom diagramu tak môžeme asociovať metriku vyjadrenú v konformných súradniciach na okolí daného bodu. Keďže však metrika v konformných súradniciach na okolí bodu x_0 je diagonálna v bode x_0 a to pre ľubovoľný bod, dostaneme, že v každom bode výsledného kauzálného diagramu máme asociovanú metriku v diagonálnom tvare.

Krivky, o ktoré sa zaujíname, majú však pre jednoduchosť nulovú zložku θ dotyčnicového vektora, a teda v skutočnosti nemôžeme uvedeným spôsobom asociovať metrické koeficienty $g_{\mu\theta}$ s metrickými koeficientmi v diagramových súradniciach $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}', \theta')$. Tieto koeficienty sa musia dopočítavať, nemôžeme ich priamo stotožniť s koeficientmi metriky vyjadrenej v konformných súradniciach na okolí daných bodov. Pokiaľ sa ale obmedzíme len na krivky ležiace v ekvatoriálnej rovine, potom dopočítané nediagonálne metrické koeficienty $g_{\mu\theta}$ vyjdú nulové a metriku v diagrame dostaneme plne diagonálnu. Z toho dôvodu sa nakoniec obmedzíme len na ekvatoriálnu rovinu, aj keď konštrukcia uvedená v ďalšej kapitole bude v princípe použiteľná pre krivky ležiace na ľubovoľných nadplochách $\theta = \text{konšt.}$

Ako sme v predchádzajúcom odstavci popísali, v prípade že uvedenú konštrukciu je možné urobiť, získame diagramové súradnice $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}', \theta')$, ktoré majú v ekvatoriálnej rovine asociovanú metriku plne diagonálnu. Očividne však tieto

³Je možné, že táto podmienka je v skutočnosti nutná na získanie rozumného výsledku. Prípad, kedy zahrnieme aj smer $\partial/\partial\theta$, nebol dôkladne preskúmaný, ale pri zahrnutí tohto smeru pre krivky, o ktoré sa zaujíname, vznikajú ďalšie problémy, ktoré nenastávajú v prípade kriviek žijúcich na nadplochách $\theta = \text{konšt.}$

súradnice musia závisieť na konkrétnej krivke o ktorú sa zaujímate. Pokiaľ by totiž tieto diagramové súradnice boli dobre definované, zostrojili by sme súradnice v priestoročase, v ktorých je Kerrova metrika diagonálna, a to je nemožné. Je preto možné pochybovať o užitočnosti takejto konštrukcie. Metrické koeficienty v diagramových súradniciach máme sice rovnaké pre všetky krivky ležiace v ekvatoriálnej rovine (resp. na nadploche $\theta = \text{konšt.}$), ale vzťah diagramových súradníc je potrebné spočítať pre každú krivku zvlášť, takže sme si zdánlivo nič nepomohli. Pokiaľ však konštrukciu skutočne urobíme, zistíme, že jediná diagramová súradnica, ktorej definícia závisí na konkrétnej krivke, je uhlová súradnica $\hat{\phi}'$. Navyše, pokiaľ krivku, o ktorú sa zaujímate, parametrizujeme pomocou BL súradnice r , bude definícia uhlovej diagramovej súradnice $\hat{\phi}'$ závisieť len na BL zložke $dt(r)/dr$ dotyčnicového vektoru krivky. V skutočnosti tak môžeme foliovať ekvatoriálnu rovinu pomocou rotačnej nadplochy danej profilom $t(r)$ a jej transláciou v súradnici t . Potom pre všetky krivky ležiace na týchto rotačných nadplochách zavádzame rovnakú diagramovú súradnicu $\hat{\phi}'$. Výsledný kauzálny diagram bude preto priamočiaro použiteľný pre zodpovedanie otázok, ktoré nezávisia na konkrétnej definícii uhlovej súradnice.

Napríklad, z diagramu bude jasná kauzálna štruktúra priestoročasu v ekvatoriálnej rovine v tom zmysle, že bude z diagramu hneď vidieť, ktoré nadplochy $t, r = \text{konšt.}$ obsahujú body v okolí ekvatoriálnej roviny, ktoré sú v kauzálnom kontakte. Navyše, časupodobná krivka spájajúca nejaké body na týchto nadplochách bude mať maximálny vlastný čas práve vtedy, keď na krivke a jej koncových bodoch platí $\theta = \pi/2$ a $\hat{\phi}' = \text{konšt.}$ Priestorupodobná krivka bude mať za týchto podmienok zase minimálnu dĺžku.

Navyše fakt, že zavádzame jednu uhlovú súradnicu pre celú rotačnú nadplochu, využijeme v kapitole 3.3.1 na skonštruovanie dvojdimenzionálnych priestorupodobných nadplôch, ktoré vnoríme do Euklidovského priestoru. Pomocou nich potom môžeme skonštruovať časový vývoj čiernodierového vesmíru v ekvatoriálnej rovine pre Kerrovu čiernu dieru v plnej analógii so Schwarzschildovou a Reissnerovou-Nordströmovou čiernou dierou.

Príprava

Uvažujme krivku v priestoročase $\gamma(s)$ a radi by sme poznali jej kauzálnu povahu. Na to sú BL súradnice nevhodné, vhodnejšie by bolo zaviesť súradnice, v ktorých je metrika diagonálna. To je však nemožné, keďže ortogonálna tetráda netvorí holonómnú bázu. Pre ľubovoľný bod krivky však možno nájsť súradnice, v ktorých bude metrika diagonálna aspoň v tomto bode. Pre bod x_0 to možno docieľiť zavedením uhlovej súradnice

$$\hat{\phi}_{x_0} = \varphi + \left. \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \right|_{x_0} t. \quad (3.92)$$

Svetelný kužel bude potom v bode x_0 spĺňať rovnicu elipsoidu s poloosami v smere ortogonálnych súradnicových vektorov $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$ a $\partial/\partial \hat{\phi}_{x_0} = \partial/\partial \varphi$. Pre posledný súradnicový vektor, dopĺňajúci ostatné na ortogonálnu bázu dotyčnicového priestoru priestoročasu, v bode x_0 platí

$$\frac{\partial}{\partial t_{x_0}} = \frac{\partial}{\partial t} - \left. \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.93)$$

a tento vektor je pre body x_0 medzi horizontmi udalostí priestorupodobný, na horizonte udalostí nulový a inak časupodobný. Metrika v týchto súradniciach prejde na tvar

$$ds^2 = \left(g_{tt} - 2g_{t\varphi} \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_{x_0} + g_{\varphi\varphi} \left(\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_{x_0} \right)^2 \right) dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}_{x_0}^2 +$$

$$+ 2g_{\varphi\varphi} \left(\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} - \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_{x_0} \right) dt d\hat{\phi}_{x_0} \quad (3.94)$$

a teda vidno, že metrika je v bode x_0 vskutku diagonálna. Na okolí bodu x_0 potom môžeme zaviesť súradnice $\hat{\tau}_{x_0}$ a $\hat{\rho}_{x_0}$ obvyklým spôsobom vzťahmi (1.8)-(1.13). V týchto je na nadplochách $\theta = \text{konšt.}$ a $\hat{\phi}_{x_0} = \text{konšt.}$ indukovaná metrika konformne ekvivalentná dvojdimenzionálnej Minkowského metrike v kartézskych súradniciach. To urobíme zavedením korytnačej súradnice

$$\frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial r} = \text{sgn } \Delta_r \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt:x_0}}}, \quad (3.95)$$

kde sme použili označenie $g_{tt:x_0}$ pre člen u dt^2 v (3.94). Podobne zavedme označenie $g_{t\varphi:x_0}$ pre polovicu člena u $dt d\hat{\phi}_{x_0}$.

Keďže tieto súradnice sú vhodné len pre dotyčnicový priestor v bode x_0 , stačí nám ich zaviesť len na okolí tohto bodu. Funkciu (3.95) teda rozviňme do prvého rádu a zintegrujme

$$\text{sgn } \Delta_r \rho_{x_0} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt:x_0}}} \Big|_{x_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt:x_0}}} \Big|_{x_0} (r - r_0)^2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt:x_0}}} \Big|_{x_0} (\theta - \theta_0) (r - r_0) + \rho_{x_0:0}(\theta), \quad (3.96)$$

kde sme označili $\rho_{x_0:0}(\theta)$ integračnú konštantu.

Ďalej môžeme urobiť tradičné súradnicové transformácie (1.8)-(1.13) a dostaneme metriku analogickú (3.63), kde miesto vlnkovaných metrických koeficientov použijeme metrické koeficienty z (3.94):

$$ds^2 = -g_{tt:x_0} \delta B_{x_0} \left(-d\hat{\tau}_{x_0}^2 + d\hat{\rho}_{x_0}^2 \right) + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}_{x_0}^2 +$$

$$+ g_{t\varphi:x_0} B_{x_0} (\cos \hat{\tau}_{x_0} \sin \hat{\rho}_{x_0} d\hat{\tau}_{x_0} - \cos \hat{\rho}_{x_0} \sin \hat{\tau}_{x_0} d\hat{\rho}_{x_0}) d\hat{\phi}_{x_0} -$$

$$- g_{tt:x_0} B_{x_0} \frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial \theta} (\cos \hat{\tau}_{x_0} \sin \hat{\rho}_{x_0} d\hat{\rho}_{x_0} - \cos \hat{\rho}_{x_0} \sin \hat{\tau}_{x_0} d\hat{\tau}_{x_0}) d\theta +$$

$$+ \left(\varrho^2 - g_{tt:x_0} \left(\frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta^2 \quad (3.97)$$

a táto je v bode x_0 diagonálna. Vo vzťahu sme označili

$$B_{x_0} = \frac{-4\delta}{\sin(\hat{\tau}_{x_0} - \hat{\rho}_{x_0}) \sin(\hat{\tau}_{x_0} + \hat{\rho}_{x_0})}. \quad (3.98)$$

Do prvého rádu rozviňme na okolí x_0 aj súradnice $\hat{\tau}_{x_0}$, $\hat{\rho}_{x_0}$ a $\hat{\phi}_{x_0}$ (označme si ich S_{x_0}) vyjadrené v BL súradniciach

$$\hat{\tau}_{x_0}(x) = \hat{\tau}_{x_0}(x_0) + \left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial t} \right|_{x_0} (t - t_0) + \left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial r} \right|_{x_0} (r - r_0) + \left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial \theta} \right|_{x_0} (\theta - \theta_0) \quad (3.99)$$

a analogicky pre $\hat{\rho}_{x_0}$. Pre uhlovú súradnicu máme vzťah

$$\hat{\phi}_{x_0}(x) = \varphi + A_{x_0} t, \quad (3.100)$$

kde sme zaviedli

$$A_x = \left. \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right|_x. \quad (3.101)$$

Z definičných vzťahov sa možno presvedčiť, že môžeme písať

$$\left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial r} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \rho_{x_0}} \right|_{x_0} \left. \frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial r} \right|_{x_0}, \quad (3.102)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial \theta} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \rho_{x_0}} \right|_{x_0} \left. \frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial \theta} \right|_{x_0}. \quad (3.103)$$

Analogicky pre $\hat{\rho}_{x_0}$.

Pre jednoduchosť uvažujme krivku, na ktorej $\theta = \text{konšt.}$, tj. v súradniciach S_{x_0} bude vyjadrená ako $\gamma(s) = (\hat{\tau}_{x_0}(s), \hat{\rho}_{x_0}(s), \hat{\phi}_{x_0}(s))$ (súradnicu θ ďalej neuvažujeme) a označme hodnotu parametru krivky s v bode x_0 označením s_0 . Dotyčnicový vektor krivky v bode x_0 bude daný:

$$\begin{aligned} V_{\gamma:x_0} &= \left. \frac{d\hat{\tau}_{x_0}}{ds} \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}_{x_0}} + \left. \frac{d\hat{\rho}_{x_0}}{ds} \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_{x_0}} + \left. \frac{d\hat{\phi}_{x_0}}{ds} \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}_{x_0}} = \\ &= \left(\left. \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial \rho_{x_0}} \frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \hat{\tau}_{x_0}}{\partial t} \frac{dt}{ds} \right) \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\tau}_{x_0}} + \\ &+ \left(\left. \frac{\partial \hat{\rho}_{x_0}}{\partial \rho_{x_0}} \frac{\partial \rho_{x_0}}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \hat{\rho}_{x_0}}{\partial t} \frac{dt}{ds} \right) \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\rho}_{x_0}} + \left(\left. \frac{d\varphi}{ds} + A_{x_0} \frac{dt}{ds} \right) \right|_{x_0} \frac{\partial}{\partial \hat{\phi}_{x_0}}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Túto konštrukciu môžeme urobiť pre ľubovoľný bod krivky. Ak by sme zaviedli súradnice $\hat{\tau}'$, $\hat{\rho}'$ a $\hat{\phi}'$ (ozn. S') závislé od BL súradníc takým spôsobom, aby dotyčnicový vektor krivky $\gamma(s)$ v ľubovoľnom bode x_0 vyjadrený v týchto súradniciach mal rovnaký tvar ako tento dotyčnicový vektor vyjadrený v súradniciach S_{x_0} , môžeme na výpočet normy vektoru použiť metriku v oboch súradniciach. Tento výrok chceme, aby platil nezávisle na voľbe bodu x_0 . Inými slovami - predpokladajme, že sme našli požadované súradnice S' . V týchto súradniciach si vyjadríme krivku $\gamma(s)$ a zvolíme si na nej ľubovoľný bod x_0 a spočítame dotyčnicový vektor v tomto bode v súradniciach S' . Následne zostrojíme súradnice S_{x_0} a v týchto súradniciach vyjadríme dotyčnicový vektor krivky. Potom zložky dotyčnicového vektoru v týchto rôznych súradniciach sú totožné (to sme od súradníc S' požadovali). Takže zo znalosti dotyčnicového vektoru krivky v bode x_0 v súradniciach S' automaticky vieme aj súradnicové zložky tohto vektoru v súradniciach S_{x_0} . Keďže norma vektoru nezávisí na zvolených súradniciach, možno na jej výpočet využiť práve súradnice S_{x_0} , v ktorých má metrika v bode x_0 diagonálny tvar.

Takéto súradnice samozrejme zaviesť nejde, pretože v týchto by bola metrika všade diagonálna, čo v Kerrovom priestoročase nie je možné dosiahnuť. Ako sa však ukáže, pokiaľ obetujeme predstavu, že sa musí jednať o dobré súradnice v priestoročase a pripustíme, aby závislosť súradníc S' na BL súradniciach bola rôzna pre rôzne krivky, bude možné nájsť diagramové súradnice S' s požadovanými vlastnosťami. Tie budú však len súradnice konštruované pre kauzálny diagram a nie súradnicami v priestoročase.

Splňme najskôr prvé dva riadky z (3.104), tj. nájdime súradnice $\hat{\tau}'$ a $\hat{\rho}'$ tak, aby dotyčnicový vektor krivky $\gamma(s)$ vo zvolenom, ale ľubovoľnom bode x_0 mal v týchto súradniciach zložky $V_{\gamma:x_0}^{\hat{\tau}'}$ a $V_{\gamma:x_0}^{\hat{\rho}'}$ rovnaké ako zložky $V_{\gamma:x_0}^{\hat{\tau}_{x_0}}$ a $V_{\gamma:x_0}^{\hat{\rho}_{x_0}}$ v súradniciach S_{x_0} konštruované pre konformný diagram na okolí bodu x_0 . To možno dosiahnuť zavedením korytnačej súradnice ρ' požiadavkami

$$\rho'(x_0) = \rho_{x_0;0} \quad (3.105)$$

a

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r}(x_0) = \text{sgn } \Delta_r \sqrt{\frac{g_{rr}}{-g_{tt;x_0}}} \Big|_{x_0} \quad (3.106)$$

a pomocou nej definovaním súradníc $\hat{\tau}'$ a $\hat{\rho}'$ obvyklým spôsobom vzťahmi (1.8)-(1.13). Vzhľadom na to, že integračnú konštantu v (3.105) možno voliť pre každé súradnice S_{x_0} ľubovoľne, vzťah (3.105) v skutočnosti definuje túto integračnú konštantu pre rôzne súradnice S_x , ale nemá na definíciu samotnej súradnice ρ' vplyv. Za definíciu ρ' teda možno brať len vzťah (3.106). Ako vidieť, táto súradnica nezávisí na krivke a teda súradnice $\hat{\tau}'$ a $\hat{\rho}'$ sú dobrými súradnicami v priestoročase.

Súradnica $\hat{\phi}'$ je však problémová. A_{x_0} je konštantou, no závislou na voľbe bodu x_0 . Použitím definície (pre budúce použitie zavedme označenie $\hat{\phi}''$)

$$\hat{\phi}''(x_0) \equiv \varphi_0 + A_0 t_0 \quad (3.107)$$

by sme dostali

$$\frac{d\hat{\phi}''}{ds} \Big|_{x_0} = \left(\frac{d\varphi}{ds} + A_0 \frac{dt}{ds} + \frac{\partial A_0}{\partial r_0} t_0 \frac{dr}{ds} \right) \Big|_{x_0}, \quad (3.108)$$

kde tretí člen na pravej strane v (3.108) je oproti (3.107) navyše.

Ako sme očakávali, musíme urobiť ústupok. Miesto toho, aby sme požadovali aby $\hat{\phi}'$ bola súradnica Kerrovho priestoročasu, použijme priamo zložku dotyčnicového vektoru $\frac{d\hat{\phi}'}{ds} \Big|_{x_0} = \frac{d\hat{\phi}_{x_0}}{ds} \Big|_{x_0}$. Tj.

$$\hat{\phi}'(s) = \int_{s_0}^s \frac{d\hat{\phi}_{x(s)}}{ds} \Big|_{x(s)} ds + \hat{\phi}'(s_0) \quad (3.109)$$

a v diagrame použijme túto funkciu definovanú na zvolenej krivke $\gamma(s)$ ako súradnicu. Keďže $\hat{\phi}'$ je definovaná vzťahom (3.109) len na krivke a závisí na voľbe krivky nie je súradnicou v priestoročase. Má však jednoduchý geometrický význam: výraz $d\hat{\phi}_{x(s)}/ds \Big|_{x(s)} \delta s = \delta \hat{\phi}_{x(s)}$, kde δs značí infinitezimálnu variáciu parametru krivky s , je veľkosť uhlu $\delta \hat{\phi}_{x(s)}$, o ktorý sa krivka posunula práve v súradnici $\hat{\phi}_{x(s)}$ z bodu krivky $\gamma(s)$. Inými slovami - je to súradnicový uhol, o ktorý sa krivka

vychýlila z bodu x v súradniciach S_x konštruovaných pre konformný diagram na okolí bodu x . Ak by sme integrál priblížili konečnou sumou

$$\int_{s_0}^s \frac{d\hat{\phi}_{x(s)}}{ds} \bigg|_{x(s)} ds \approx \sum_{i=1} \frac{d\hat{\phi}_{x(s)}}{ds} \bigg|_{x_i(s_i)} (s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=1} \delta\hat{\phi}_{x(s_i)},$$

bude integrál súčtom týchto posunutí. V oblasti nad vonkajším (resp. pod vnútorným) horizontom udalostí sú súradnice S_{x_0} adaptované na pozorovateľa v x_0 ortogonálneho na nadplochy $t = \text{konšt.}$ ⁴. Tento pozorovateľ je význačný tým, že jeho uhlový moment je nulový a teda uhlovú výchylku krivky $\delta\hat{\phi}_{x_0}$, ktorú tento pozorovateľ vidí, možno chápať ako príspevok nenulovosti momentu hybnosti na krivke. Súradnicový uhol $\hat{\phi}'$ má tak zaujímavý fyzikálny význam ako súčet infinitezimálnych uhlov meraných ZAMO pozorovateľmi.

Integrand však vyjadrujeme pre každý bod v iných súradniciach (vzhľadom na iného pozorovateľa) a ak by sme chceli spočítať vzťah $\hat{\phi}'$ k nejakým konkrétnym súradniciam v priestoročase, museli by sme zahrnúť aj príspevok prameniáci zo vzťahu medzi súradnicami používanými v jednotlivých bodoch. Je to práve tento vzťah, ktorý je problematický a závisí na zvolenej krivke.

Ten môžeme vyjadriť vzhľadom k uhlovej súradnici $\hat{\phi}''$ definovanej vzťahom (3.105) pomocou vzťahu

$$\frac{d\hat{\phi}''}{ds} \bigg|_{x_0} - \frac{d\hat{\phi}'}{ds} \bigg|_{x_0} = \frac{\partial A_{x_0}}{\partial r_0} t_0 \frac{dr}{ds} \bigg|_{x_0}. \quad (3.110)$$

Integrovaním po krivke z s_0 do s môžeme písať

$$\hat{\phi}'(x) = \hat{\phi}'(\gamma^{-1}(x)) = \hat{\phi}''(x) - \hat{\phi}''(x_0) - \int_{s_0}^{\gamma^{-1}(x)} \frac{\partial A_x}{\partial r} t \frac{dr}{ds} ds + \hat{\phi}'(x_0), \quad (3.111)$$

kde sme pomocou prvej rovnice zaviedli diagramovú súradnicu $\hat{\phi}'$ ako funkciu priestoročasových súradníc za predpokladu, že krivka γ nepretína samu seba. Takýmto spôsobom však funkcia $\hat{\phi}'(x)$ bude definovaná len pre body krivky.

Na oblasti, kde krivku možno parametrizovať priamo BL súradnicou r , sa nám integrál zjednoduší

$$- \int_{r_0}^r \frac{dA_x}{dr} t(r) dr = [A_x t]_{r_0}^r + \int_{r_0}^r A_x \frac{dt}{dr} dr, \quad (3.112)$$

kde sme použili integráciu per partes. Na oblasti, kde takúto parametrizáciu nemožno zaviesť, je derivácia dr/ds nulová a teda táto oblasť k integrálu neprispieva. Výsledný integrál tak bude súčtom integrálov cez jednotlivé oblasti, kde takúto parametrizáciu zaviesť možno.

Vyjadríme si BL súradnicu φ pomocou diagramových súradníc $\hat{\tau}'$, $\hat{\rho}'$, θ a $\hat{\phi}'$, z rovnice (3.110), (3.114)-(3.115)

$$\varphi(x) = \hat{\phi}'(x) - \hat{\phi}'(x_0) - \int_{r_0(\hat{\tau}'_0, \hat{\rho}'_0, \theta_0)}^{r(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \theta_0)} A_x \frac{dt}{dr} dr + \varphi(x_0). \quad (3.113)$$

⁴Súradnicový vektor $\partial/\partial t_{x_0}$ je v bode x_0 ortogonálny na nadplochy $t = \text{konšt.}$ aj medzi horizontmi udalostí, na tejto oblasti je však priestorupodobný.

Integrál v (3.113) je integrálom po krivke γ parametrizovanej priamo súradnicou r . Ten závisí na r a zložke dotyčnicového vektoru dt/dr (uvažujeme len krivky, na ktorých je hodnota súradnice θ konštantná) v tomto bode. Trieda kriviek, ktoré sa v tejto zložke nelíšia, tak vedú na rovnaký integrál a rovnaké zobrazenie medzi φ a diagramovou súradnicou $\hat{\phi}'$.

Konkrétne, integrál nezávisí na hodnote súradnice t pozdĺž krivky, závisí len na tom ako sa mení v smere r . To znamená, že krivky, ktoré sa líšia o transláciu v súradnici t , vedú na rovnaký integrál. Integrál nezávisí ani na zložke dotyčnicového vektoru $d\varphi/dr$, či hodnote φ a to v nijakom bode krivky a taktiež nezávisí ani na konkrétnej parametrizácii krivky.

Z uvedených faktov vyplýva, že pokiaľ zvolíme na nadploche $\theta = \text{konšt.}$ rotačný podpriestor $(t(r), \varphi)$ a celú nadplochu foliujeme pomocou translácie tohto podpriestoru v t , dostaneme pre všetky krivky ležiace na niektorom z rotačných podpriestorov rovnakú uhlovú súradnicu $\hat{\phi}'_{t(r)}$ spĺňajúcu vzťah

$$d\hat{\phi}'_{t(r)} \equiv \varphi + F_{t(r)}(r; \theta). \quad (3.114)$$

Ten možno chápať ako definíciu uhlovej súradnice pre konkrétnu foliaciu nadplochy $\theta = \text{konšt.}$ priestoročasu danej rotačným podpriestorom $t(r)$. Funkcia $F(r; \theta)$ je daná neurčitým integrálom

$$F_{t(r)}(r; \theta) \equiv \int A_x \frac{dt}{dr} dr, \quad (3.115)$$

kde integračnú konštantu volíme ľubovoľne.

Vyjadrením indukovanej metriky na konkrétnej rotačnej nadploche $t(r)$ v tejto uhlovej súradnici dostaneme po zavedení korytnačej súradnice vzťahom (3.109)

$$\begin{aligned} ds_{t(r)}^2 &= \left(g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}'_{t(r)}^2 = \\ &= \left(g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) (dt^2 - d\rho'^2) + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}'_{t(r)}^2, \end{aligned} \quad (3.116)$$

kde 1-formy dt a dr sú navzájom závislé $dt = (dt/dr) dr$. Po kompaktifikácii dostaneme

$$ds_{t(r)}^2 = - \left(g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} \right) \frac{-4\delta^2}{\sin(\hat{\tau}' + \hat{\rho}') \sin(\hat{\tau}' - \hat{\rho}')} (-d\hat{\tau}'^2 + d\hat{\rho}'^2) + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}'_{t(r)}^2. \quad (3.117)$$

Možno si všimnúť, že metrické koeficienty indukovanej metriky nezávisia na voľbe rotačného podpriestoru, na ktorý je metrika indukovaná - na tejto voľbe závisí len súradnica $\hat{\phi}'_{t(r)}$. To znamená, že pokiaľ skonštruujeme diagram $(\hat{\tau}', \hat{\rho}', \hat{\phi}')$, budú svetelné kužele v diagrame nezávislé na konkrétnej krivke, ktorá definuje súradnicu $\hat{\phi}' \Leftrightarrow \hat{\phi}'_{t(r)}$. Diagram tak možno priamočiaro použiť na získanie informácií, ktoré nezávisia na konkrétnej definícii uhlu $\hat{\phi}'$.

Konštrukcia diagramu pre ekvatoriálnu rovinu

Ako prvé zavedme korytnačiu súradnicu požiadavkom (3.106)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r} = \text{sgn } \Delta_r \sqrt{\frac{g_{rr} g_{\varphi\varphi}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt} g_{\varphi\varphi}}} = \frac{\sqrt{(r^2 + a^2) \varrho^2 + 2mra^2 \sin^2 \theta}}{\Delta_r}. \quad (3.118)$$

Tá závisí na uhle θ , takže v metrike dostaneme nediagonálne členy so súradnicou θ . Tieto nediagonálne členy komplikujú tvar svetelných kužeľov, vymiznú však v ekvatoriálnej rovine. Tá je aj vďaka reflexnej symetrii Kerrovho priestoročasu významná, preto sa pre jednoduchosť obmedzme na konštrukciu diagramu len pre ekvatoriálnu rovinu, aj keď postup popísaný v predchádzajúcej podkapitole umožňuje diagram skonštruovať pre ľubovoľnú nadplochu $\theta = \text{konšt.}$

V ekvatoriálnej rovine dostávame pre korytnačiu súradnicu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r} = \frac{\sqrt{r^4 + a^2 r^2 + 2ma^2 r}}{\Delta_r} \quad (3.119)$$

vyobrazení v obrázku 3.16, kde je porovnaná s RN korytnačou súradnicou.

Rozdiel medzi diagramom, ktorý konštruujeme pre Kerrovu čiernu dieru a diagramom pre RN čiernu dieru, je iba v presnom tvare korytnačej súradnice. Tzn. že krivky $\rho' = \text{konšt.}$ aj $t = \text{konšt.}$ sú rovnaké ako v prípade RN. Z obrázku 3.21 vidíme, že RN korytnačia súradnica má silnejšiu divergenciu v okolí horizontov udalostí. Má však miernejšiu závislosť na r medzi nimi a v okolí singularity. Pre veľké hodnoty súradnice $r \gg r_+$ sa obe súradnice asymptoticky blížia $r + \rho_0$, kde ρ_0 sme označili príslušnú integračnú konštantu.

Hustota súradnicových kriviek $r = \text{konšt.}$ je tak v okolí singularity a medzi horizontmi vyššia než u RN, zatiaľ čo v okolí horizontov udalostí je nižšia a pre $r \gg r_+$ je rovnaká.

V okolí vonkajšieho horizontu udalostí možno analogicky (3.70)-(3.71) písať

$$\rho' = r_+ \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-} \log |r - r_+| + L'_{\rho'_+} \quad (3.120)$$

a v okolí vnútorného horizontu udalostí:

$$\rho' = -r_- \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-} \log |r - r_-| + L'_{\rho'_-}. \quad (3.121)$$

Majúc korytnačiu súradnicu, môžeme vzťahmi (1.8)-(1.13) zaviesť kompaktifikované súradnice.

Pre metrický koeficient v (3.117) platí

$$g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{\Delta_r \sin^2 \theta}{g_{\varphi\varphi}}. \quad (3.122)$$

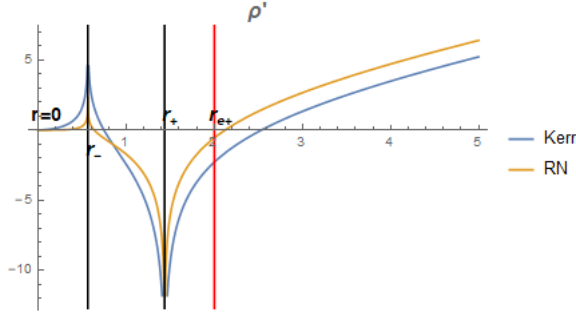
Táto funkcia má na okolí horizontov udalostí všetky vlastnosti relevantné pre ukázanie spojitosti metriky v kapitole 3.2.2 rovnaké ako funkcia \hat{g}_{tt} v tejto kapitole. To isté platí pre korytnačiu súradnicu, takže v súradniciach S' je metrika na vonkajšom horizonte udalostí regulárna pre

$$\delta_+ = r_+ \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-} \quad (3.123)$$

a na vnútornom pre

$$\delta_- = r_- \frac{r_+ + r_-}{r_+ - r_-}. \quad (3.124)$$

Vzhľadom na to, že korytnačia súradnica aj metrické koeficienty sú kvalitatívne plne analogické RN, môžeme voľiť parametre m a n rovnako. Tj. pre m párne

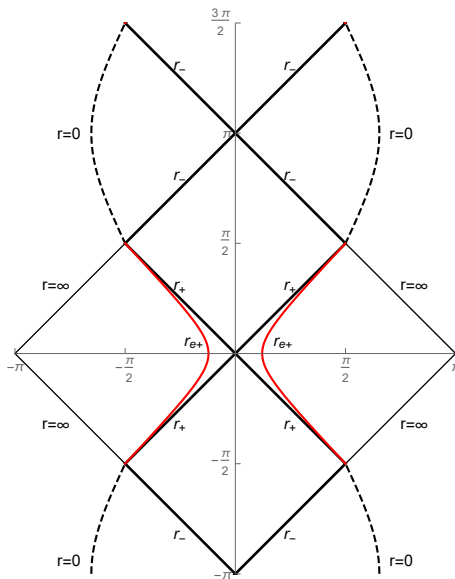


Obr. 3.16: Korytnačia súradnica pre Kerrov priestoročas s $a = 0.9$ a porovnanie s korytnačou súradnicou v RN s rovnakými horizontmi udalostí

zavádzame pre $r > r_+$ $n = -1$, pre $r_- < r < r_+$ $n = 0$, pre $r < r_-$ $n = 1$ a pre m nepárne opačne, tj. pre $r > r_+$ $n = 1$, pre $r_- < r < r_+$ $n = 0$, pre $r < r_-$ $n = -1$ (obr. 2.2).

Výsledný diagram je vyobrazený v obrázku 3.17. Treba mať však na pamäti, že tento bol konštruovaný pomocou metriky (3.116) indukovanej na konkrétnu rotačnú nadplochu v ekvatoriálnej rovine danú závislosťou $t(r)$. Pre rôzne funkcie $t(r)$ líšiace sa o viac než konštantnu, dostaneme rôzne uhly $\hat{\phi}'_{t(r)}$, ale metrické koeficienty budú vždy rovnaké.

Aj napriek problematickej uhlovej súradnici $\hat{\phi}'$, tento diagram verne zobrazuje kauzálnu štruktúru v tom zmysle, že je z neho jasne viditeľné, ktoré nadplochy $r, t = \text{konšt.} \Leftrightarrow \hat{\rho}', \hat{\tau}' = \text{konšt.}$ obsahujú body v blízkom okolí ekvatoriálnej roviny, ktoré sú navzájom v kauzálnom kontakte. Napríklad je z diagramu jasne vidieť, že ľubovoľný bod so súradnicami $(\hat{\rho}' = \pi/4, \hat{\tau}' = -\pi/2)$ nemôže kauzálny ovplyvniť bod so súradnicami $(\pi/4, \pi/2)$ (s neurčenými súradnicami $\hat{\phi}'$ a θ , kde θ leží v blízkom okolí ekvatoriálnej roviny), pretože ľubovoľná krivka $\gamma(s)$ ležiaca v rovine $\hat{\phi}' = \text{konšt.}$ a $\theta = \pi/2$ a spájajúca body s danými súradnicami je priestorupodobná a variácia v $\hat{\phi}'$ a θ dĺžku krivky ešte zvýši.



Obr. 3.17: Kauzálny diagram pre Kerrov priestoročas v ekvatoriálnej rovine pre $a = 0.9m$.

3.3 Vnorenie vybraných priestorupodobných nadplôch do Euklidovského priestoru

3.3.1 Vnorenie rotačného podpriestoru daného kauzálnym diagramom

Majúc kauzálny diagram z prechádzajúcej kapitoly, môžeme v ňom zvoliť priestorupodobnú nadplochu a tú vnoriť do Euklidovskej roviny podobne, ako tomu bolo u RN. Táto priestorupodobná nadplocha bude rotačnou nadplochou, ktorá definuje diagramový uhol $\hat{\phi}'$ a na ktorej bude indukovaná metrika dané práve rovnicou (3.116). Tá je diagonálna a axiálne symetrická rovnako ako RN metrika s rovnakou asymptotikou pre $r \rightarrow \infty$. Voľme teda analogicky RN $t = \text{konšt.}$ pre $r > r_{max}$ a $\hat{t}' = \text{konšt.}$ pre $r < r_{max}$, v prípade, že nadplocha zasahuje do oblasti $r > r_+$. V opačnom prípade voľme na celom obore $\hat{t}' = \text{konšt.}$ r_{max} dostaneme z rovnice

$$\rho'(r_{max}) = 0 \quad (3.125)$$

a udáva hodnotu r , pre ktorú \hat{t}' súradnica krivky $t = \text{konšt.}$ dosahuje svoje maximum. Jednotlivé krivky tak môžeme parametrizovať hodnotou súradnice \hat{t}' na krivke pre $\hat{\rho}' = 0$, ktorú označíme \hat{t}'_0 .

Vďaka tejto voľbe bude pre $r > r_{max}$ platiť $\hat{\phi}' = \varphi$. Pre $r < r_{max}$ však závislosť $t(r)$ nie je triviálna a je potrebné spočítať integrál (3.115), aby sme získali transformačný vzťah medzi $\hat{\phi}'$ a φ . Ten bude závisieť aj na hodnote \hat{t}'_0 a pre $a = 0.9m$ a rôzne hodnoty \hat{t}' je vyobrazený v obrázkoch 3.19 spoločne s krivkami $\hat{\phi}' = \text{konšt.}$ zobrazenými v BL súradniciach (r, φ) .

Na vnorenie teda využijme tvar metriky (3.116). Pokiaľ nadplochu vnoríme do Euklidovského priestoru v cylindrických súradniciach $(z, r', \hat{\phi}'_{t(r)})$, dostaneme

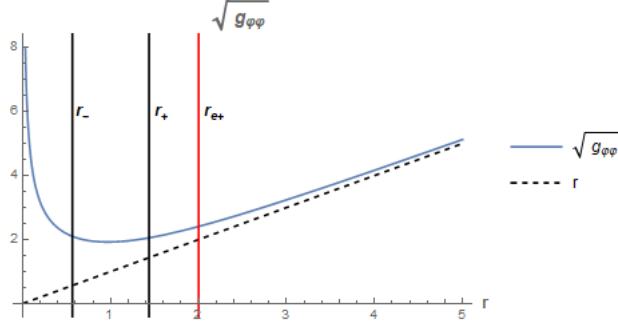
$$r' = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}, \quad (3.126)$$

$$\frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{g_{rr} \left[1 - \left(\frac{dt}{d\rho'} \right)^2 \right] - \frac{1}{4g_{\varphi\varphi}} \left(\frac{dg_{\varphi\varphi}}{dr} \right)^2}, \quad (3.127)$$

kde deriváciu $dt/d\rho'$ získame z rovníc (1.33) a (1.37) a do výsledku dosadzujeme $\rho'(r)$ získaného integráciou (3.119). Rovnica (3.127) sa potom integruje do hodnoty súradnice $r = r_{\hat{\rho}=0}$ danej výrazom (1.35).

Ako sme spomínali v úvode, metrika na rotačných podpriestoroch je podobne ako tomu bolo u RN diagonálna a axiálne symetrická a navyše metrické koeficienty majú rovnakú asymptotiku pre $r \rightarrow \infty$. Jeden z hlavných rozdielov oproti RN je ten, že súradnica r v RN metrike charakterizuje obvod kružníc $t, r, \theta = \text{konšt.}$ V Kerrovom priestoročase je tento obvod daný hodnotou $r' = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$. Závislosť tejto funkcie na súradnici r je vyobrazená v obrázku 3.18.

Ako vidno, pre veľké hodnoty r je $r' \approx r$ tak, ako tomu je v RN. Pre hodnoty r blízke vonkajšej ergosfére a menšie sa však obvodový polomer kružníc r' čoraz viac vzdialuje súradnicovej hodnote r a po dosiahnutí minima v $r = \sqrt[3]{a^2 m}$ začína r' s klesajúcim r rásť a v okolí singularít obvod kružníc dokonca diverguje. Navyše, sklon krivky, ktorého druhá mocnina je v rovnici (3.127) druhým členom pod odmocninou, veľmi rýchlo rastie s r blížiacim sa singularite, takže tento



Obr. 3.18: Závislosť funkcie $r' = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$, udávajúcej obvodový polomer kružníc $t, r, \theta = \text{konšt.}$ na hodnote súradnice r v ekvatoriálnej rovine pre $a = 0.9$ a jej porovnanie s RN obvodovým polomerom (hodnotou r). Vyjadrené v jednotkách m .

člen v okolí singularity dáva veľký záporný príspevok a výrazne sťažuje možnosť vnorenia na tejto oblasti.

Naopak, prvý člen pod odmocninou v (3.127) sa skladá z g_{rr} , ktorý má v ekvatoriálnej rovine rovnakú závislosť na r ako v prípade RN a $(1 - (dt/d\rho')^2)$, ktorý má rovnakú závislosť na ρ' ako v prípade RN. Rozdiel tak vyplýva len z rozdielu medzi korytnačimi súradnicami v RN a v Kerrovom priestoročase. Tie sú kvalitatívne podobné, takže príspevok prvého člena pod odmocninou v (3.127) je podobný tomu z RN a hlavný rozdiel medzi funkciou dz/dr v RN a v Kerrovom priestoročase v okolí singularity vyplýva práve z druhého člena $d\sqrt{g_{\varphi\varphi}}/dr$. Tj. fakt, že polomer kružníc v okolí singularity rastie so záporným r a diverguje pre $r \rightarrow 0$, spôsobuje, že závislosť $(dz/dr)^2$ klesá do nuly a následne do záporných hodnôt omnoho rýchlejšie než tomu bolo v prípade Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery.

Vnorené plochy sú vyobrazené pre rôzne hodnoty $\hat{\tau}'_0 \equiv \hat{\tau}'(\rho' = 0)$ v obrázkoch 3.19. Podobne ako pri RN sa s rastúcim $\hat{\tau}'_0 \in (0, \pi/2)$ hrdlo medzi paralelnými vesmírmi rozširuje. Ako sme však čakali zo závilosti $\sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ na r , je hrdlo oproti RN širšie a pre $\hat{\tau}'_0 = \pi/2 - 0.01$ možno dokonca vidieť rozširovanie v okolí $z = 0$.

Veľký rozdiel oproti RN nastáva pre $\hat{\tau}'_0 \in (\pi/2, \pi)$, tj. pre plochy vchádzajúce do singularity, ako sme očakávali analýzou členov v rovniciach (3.126)-(3.127). Pre malé hodnoty r totiž polomer kružníc rastie nado všetky medze, zatiaľ čo u RN klesali do nuly. Na tomto intervale tak dostávame oblasti $r > r_-$ v paralelných vesmíroch spojené hrdlom, ktoré sa s r rastúcim do $r_{\rho'=0}$ zužuje v prípade, že $r_{\rho'=0} < \sqrt[3]{a^2 m}$, v opačnom prípade sa hrdlo od tejto hodnoty začne rozširovať.

Keďže polomer kružníc $r = \text{konšt.}$ rastie nado všetky medze, mohlo by sa zdať, že tak činí aj povrch vnorovanej nadplochy. Vieme však, že nadplocha sa v okolí singularity nedá vnoriť, tj. že platí $\lim_{r \rightarrow 0} (dz/dr)^2 = -\infty$, takže povrch môže vyjsť konečný. Skúsme toto preskúmať.

Indukovaná metrika vnorenej nadplochy má tvar

$$ds^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr'}\right)^2\right) dr'^2 + g_{\varphi\varphi} d\hat{\phi}^2. \quad (3.128)$$

Povrch plochy (A) medzi r'_1 a r'_0 teda bude

$$A = 2\pi \int_{r'_0}^{r'_1} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dr'}\right)^2\right)} g_{\varphi\varphi} dr'. \quad (3.129)$$

Pokiaľ prejdeme k súradnici r :

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \frac{dr'}{dr}\right)^2\right)} g_{\varphi\varphi} \frac{dr'}{dr} dr = \\ &= 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\left(\frac{1}{4g_{\varphi\varphi}} \left(\frac{dg_{\varphi\varphi}}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)} g_{\varphi\varphi} dr. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Za $(dz/dr)^2$ dosadíme z (3.127):

$$A = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{g_{rr} \left(1 - \left(\frac{dt}{d\rho'}\right)^2\right)} g_{\varphi\varphi} dr. \quad (3.131)$$

Na okolí $r = 0$ tak dostaneme do prvého rádu

$$A \approx \text{konšt.} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{r} dr, \quad (3.132)$$

takže povrch kruhovej plochy v okolí singularity klesá do nuly ako $r^{3/2}$.

Nakoniec sa pozrime na samotný uhol $\hat{\phi}'$. Keďže vnorované podpriestory možno parametrizovať hodnotou $\hat{\tau}'_0 \equiv \hat{\tau}'(\hat{\rho}' = 0)$, označme jednotlivé uhly $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0}(r)$. Ich závislosť na r je, ako bolo spomínané, vyobrazená v obrázkoch 3.19 pre rôzne hodnoty $\hat{\tau}'_0$ a pre $a = 0.9m$ spoločne s krivkou $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0} = \text{konšt.}$ v BL súradniciach.

Pozrime sa najskôr na oblasť $\hat{\tau}'_0 \in (0, \pi/2)$. Ako z obrázkov vidieť, pre $r \gg 1$ platí $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0} \approx \varphi$, pričom pre $r > r_{max}$ platí rovnosť presne. S r blížiacemu sa horizontu udalostí sa súradnica $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0}$ čoraz rýchlejšie na horizont udalostí namotáva a učiní tak nekonečne krát. Pre $r < r_+$ sa začne táto súradnica odmotávať a ako sa r blíži $r_{\hat{\rho}'=0}$, čoraz rýchlejšie sa namotáva na túto kružnicu v opačnom smere oproti horizontu udalostí.

Aj napriek tomu, že súradnica $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0}$ sa na horizont udalostí nekonečne krát namotáva, je jej dĺžka konečná. To vidieť z metriky (3.117), ktorá je na horizontoch udalostí pre vhodnú voľbu parametru δ regulárna (vzťahy (3.123), (3.124)). Nevhodnosť BL súradnice na okolí horizontov udalostí je vidieť aj z faktu, že pre ľubovoľnú časupodobnú krivku prechádzajúcu horizontom udalostí platí pre jej dotyčnicový vektor $dt/ds \rightarrow \infty$, $d\varphi/ds \rightarrow \infty$ (O'Neill, 1995).

Čo sa týka závislosti na $\hat{\tau}'_0$, tak pre $\hat{\tau}'_0 = 0$ platí $dt/dr = 0$, tj. $\hat{\phi}'_0 = \varphi$ a navyše $r_+ = r_{\hat{\rho}'=0}$. Ako $\hat{\tau}'_0$ rastie smerom k $\pi/2$, rozdiel $r_+ - r_{\hat{\rho}'=0}$ sa zväčšuje, rovnako sa zväčšuje hodnota $F_{t(r)}$ pre danú hodnotu $r > r_+$, no znižuje sa sklon tejto funkcie. Tj. s $\hat{\tau}'_0$ rastúcim do $\pi/2$ sa krivky $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0}$ začínajú namotávať na horizont udalostí v čoraz väčších hodnotách r a rýchlosť namotávania sa spomaľuje.

Pre $\hat{\tau}'_0 \in (\pi/2, \pi)$ sa krivka $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0}$ taktiež namotáva na $r_{\hat{\rho}'=0}$ aj r_- a to nekonečne krát, na rozdiel od vonkajšieho horizontu udalostí však nemení svoj smer. So

zmenšujúcim sa $r < r_-$ sa potom namotávanie spomaľuje a v blízkosti singularity platí $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0} \approx \varphi + \text{konšt.}$ Na intervale $\hat{\tau}'_0 \in (\pi/2, \pi)$ sa ďalej hodnota $r_{\hat{\rho}'=0}$ s rastúcim $\hat{\tau}'_0$ blíži r_- a rozdiel $\hat{\phi}'_{\hat{\tau}'_0} - \varphi$ v blízkom okolí singularity, kde ho možno považovať za konštantný, klesá.

Zhrnutie

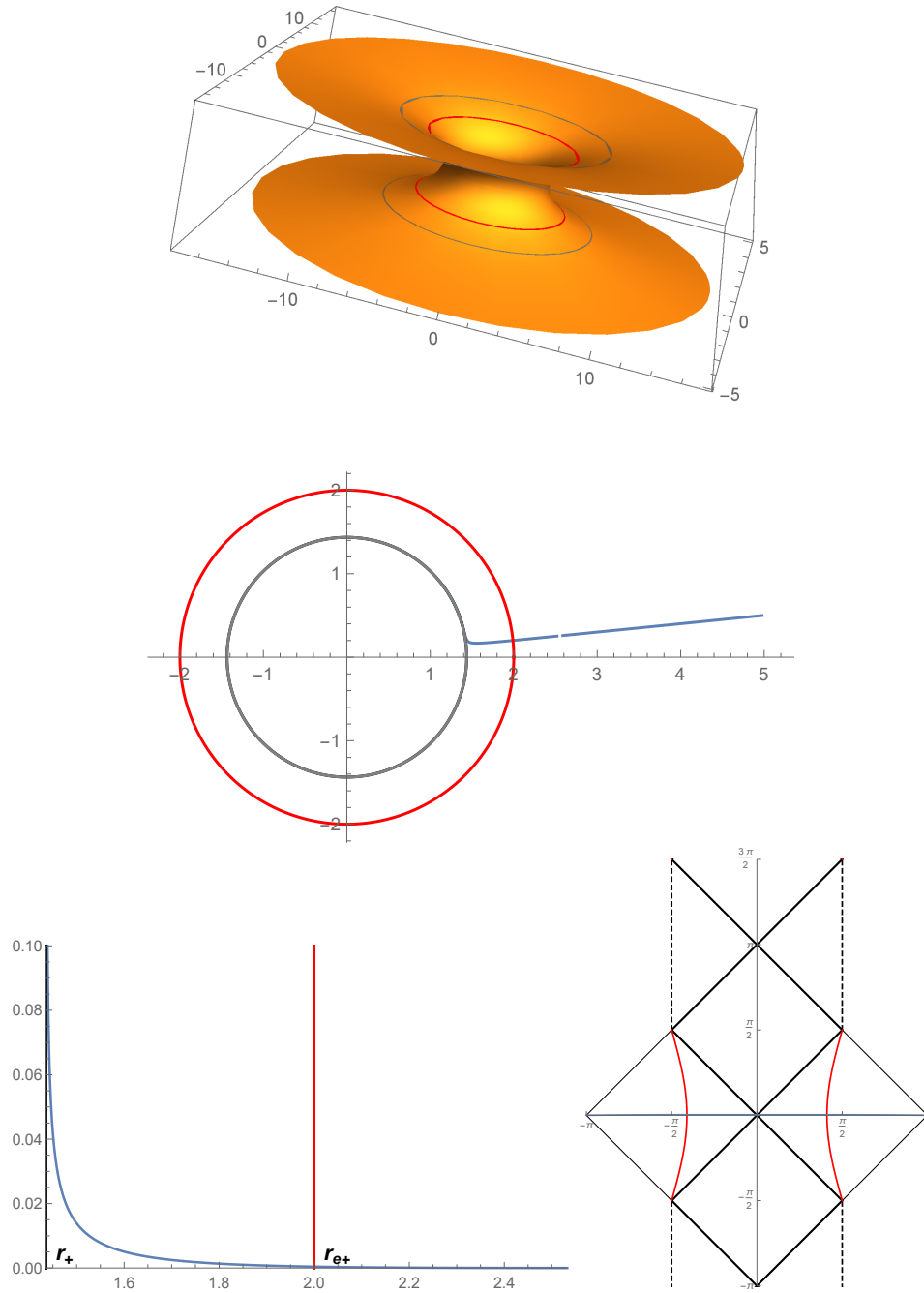
Podobne ako v prípade Schwarzschildovej a Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery je možné dať závislosti vnorenej nadplochy na časupodobnom parametre $\hat{\tau}'_0$ interpretáciu časového vývoja čiernodierového vesmíru. Vývoj je cyklický s periódou 2π tak, ako tomu bolo v prípade Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery.

Pokiaľ analýzu vývoja začneme z hodnoty $\hat{\tau}'_0$, ktorá sa limitne zprava blíži $-\pi/2$, bude čiernodierový vesmír v ekvatoriálnej rovine zložený z dvoch paralelných vesmírov spojených Einsteinovým-Rosenovým mostom podobne ako tomu je v prípade Reissnerovej-Nordströmovej čiernej diery (obr. 3.19e). Na rozdiel od RN však prierez hrdla nemá pre zvolené parametre rastúci charakter v r , ale naopak začína s klesajúcim charakterom. To sa prejavuje ako rozširovanie hrdla v okolí hodnoty $z = 0$, ako je vidieť z obrázku.

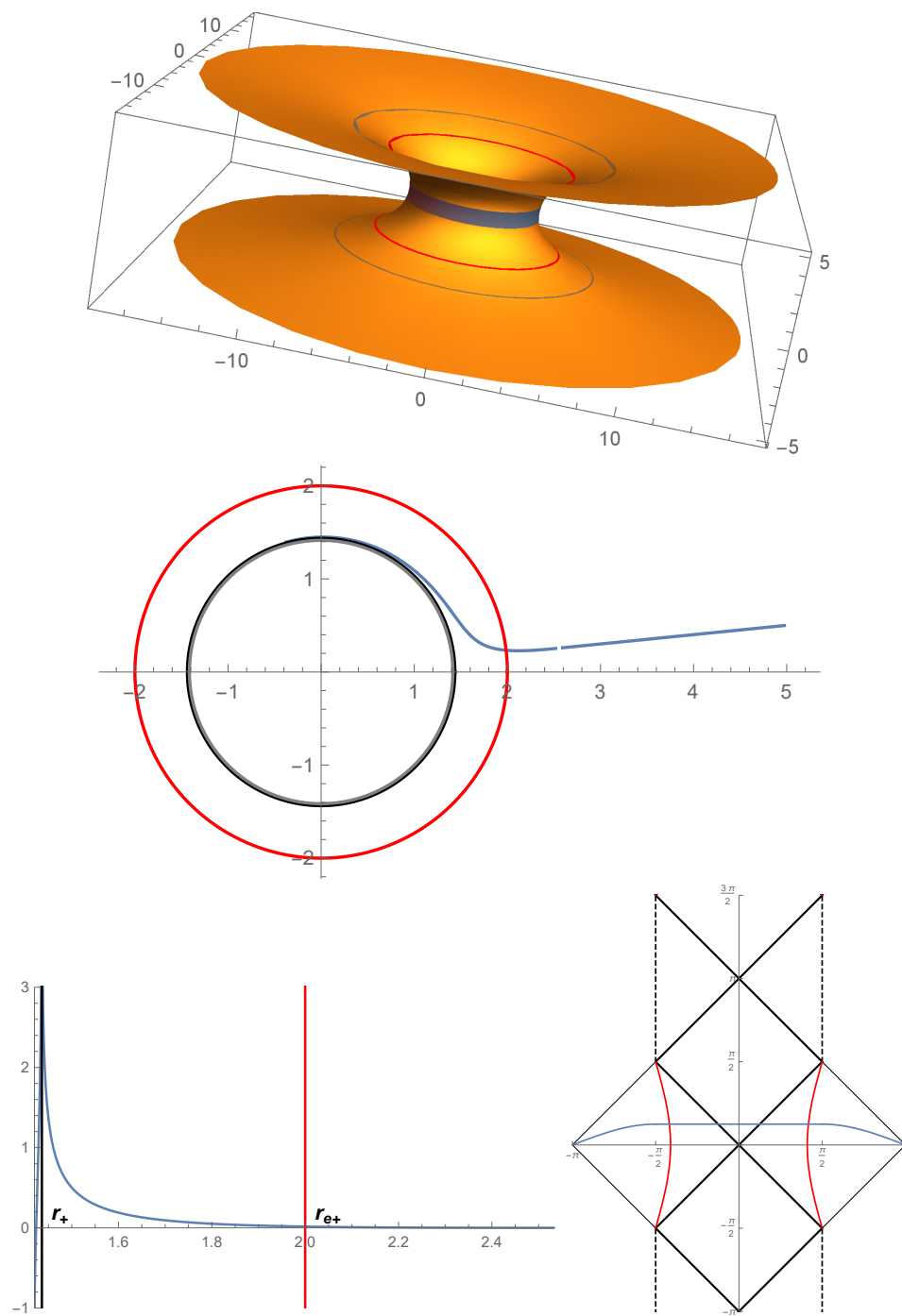
Pre túto vnorenú nadplochu je vhodné definovať ignorovateľnú uhlovú súradnicu $\hat{\phi}'$ vzťahmi (3.114), (3.115), taktiež vyobrazenú v obrázku 3.19e. Je to táto súradnica, ktorá v diagrame vnorenej nadplochy hrá úlohu cylindrickej uhlovej súradnice. Pre hodnotu parametru $\delta = \delta_+$ zo vzťahu (3.123) je metrika na horizonte udalostí regulárna a krivka konštantnej hodnoty súradnice $\hat{\phi}'$, spájajúca body o rôznych hodnotách súradnice r , má na vnorenej nadploche najkratšiu a konečnú vzdialenosť.

S rastúcim časom (tj. s rastúcou hodnotou parametru $\hat{\tau}'_0$) sa Einsteinov-Rosenov most postupne zmenšuje až do hodnoty $\hat{\tau}'_0 = 0$ (obr. 3.19e-3.19a) podobne, ako tomu bolo v prípade predošlých čiernych dier. Pre túto hodnotu je veľkosť Einsteinovho-Rosenovho mostu nulová a následne začína znovu rásť symetricky pri zámene $\hat{\tau}'_0 \rightarrow -\hat{\tau}'_0$ oproti intervalu $\hat{\tau}'_0 \in (-\pi/2, 0)$. Tak sa to deje do hodnoty $\hat{\tau}'_0 = \pi/2$, kedy sa, podobne ako u RN, odtrhne bublina spájajúca časupodobné singularity (obr. 3.19f). Tá sa ďalej zmenšuje až do hodnoty $\hat{\tau}'_0 = \pi$ (obr. 3.19f-3.19j), kde sa vývoj opäť obráti, rovnako ako v prípade RN.

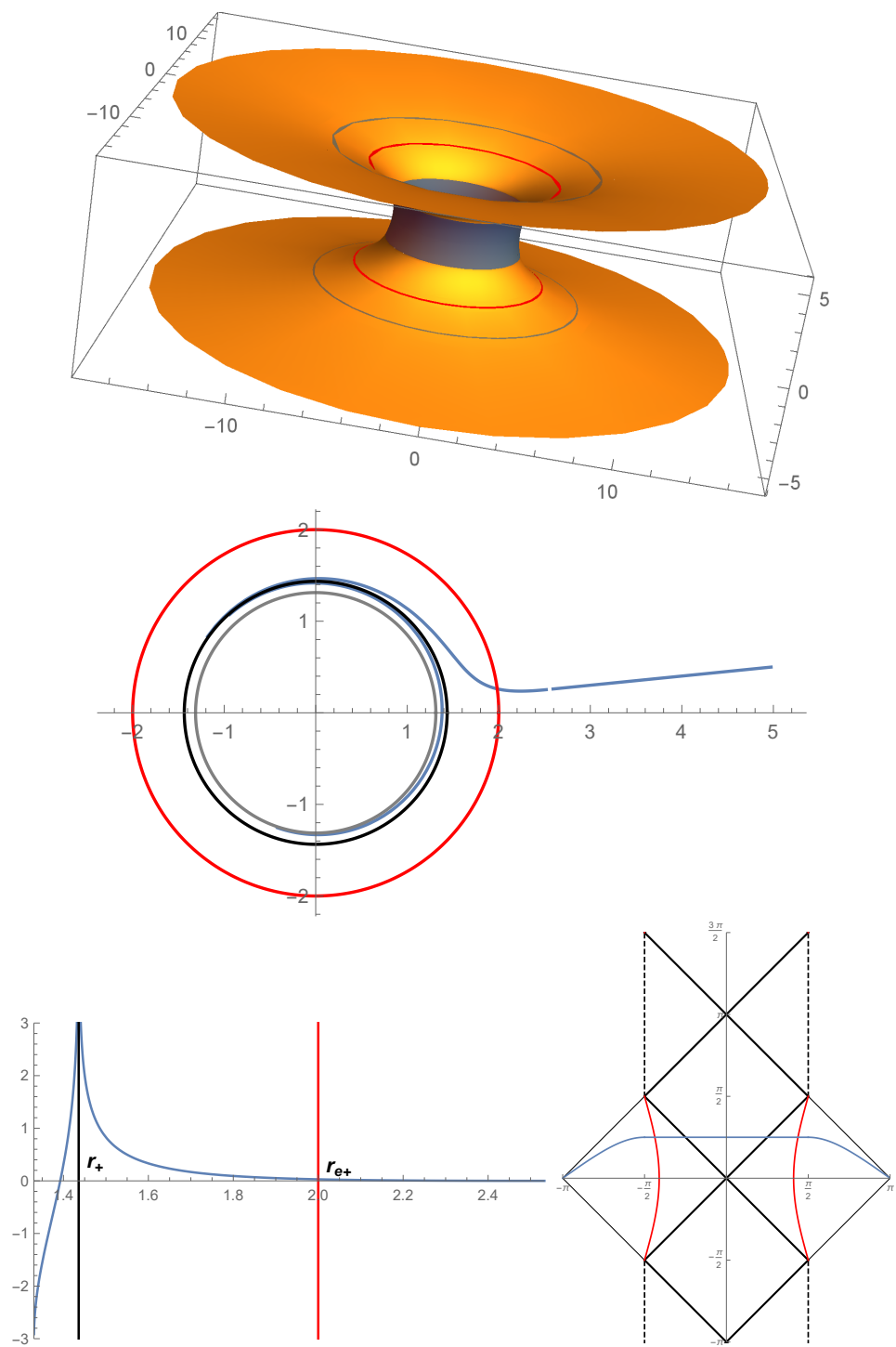
Na rozdiel od RN má však bublina spájajúca singularity veľmi odlišný charakter. Polomer kriviek $r = \text{konšt.}$ na vnorenej nadploche totiž s klesajúcou hodnotou rastie. Vnorená nadplocha tak na tejto oblasti zdanlivo znovu pripomína situáciu, kedy máme dva paralelné vesmíry spojené Einsteinovým-Rosenovým mostom. Vnorenie však nemožno urobiť až po singularitu, naopak, rýchle rozširovanie obvodového polomeru kriviek $r = \text{konšt.}$ spôsobuje, že funkcia $(dz/dr)^2$ daná rovnicou (3.127) veľmi rýchlo klesá do nuly a následne do záporných hodnôt. Navyše, ako sme spočítali, povrch vnorovanej nadplochy je v okolí singularity konečný, čo neodpovedá situácii s dvoma paralelnými vesmírmi na okolí $r = \infty$.



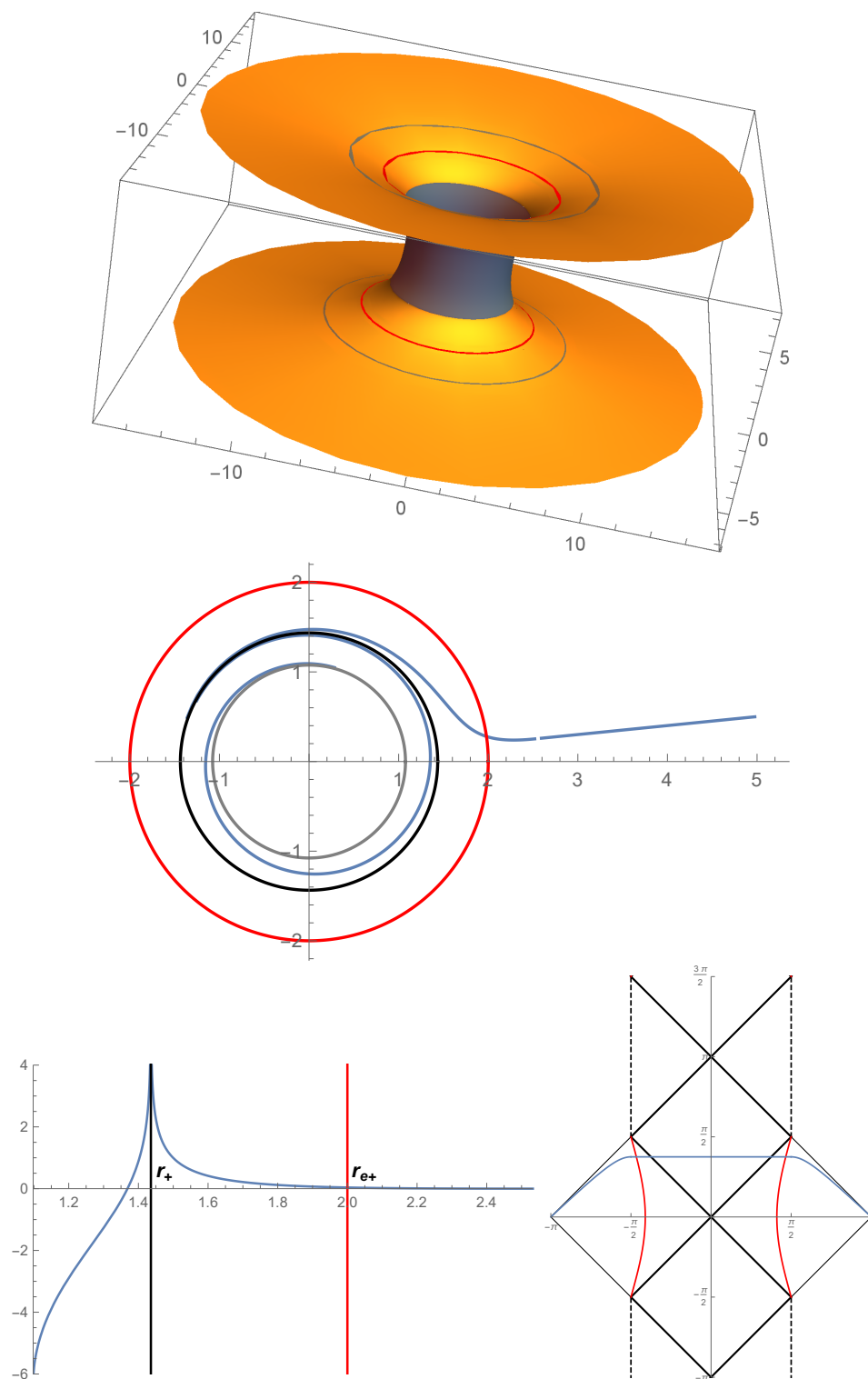
Obr. 3.19a: Na hornom obrázku je vyobrazená vnorená plocha, ktorej závislosť $\hat{\tau}'(\hat{\rho}')$ je vidieť v konformnom diagrame vpravo dole (modrá krivka), do Euklidovského priestoru pre $a = 0.9$ a $\hat{\tau}'(0) = 0.01$. Kružnica $r = r_{e+}$ je vyobrazená červenou farbou, kružnica $r = r_{max}$ sivou, rovnako ako priestor pod vonkajším horizontom udalostí. V strede je krivka konštantnej hodnoty súradnice $\hat{\phi}'$ v BL súradniciach (r, φ) , dole vľavo integrál $F_{t(r)}$ ako funkcia r (3.115), definujúci diagramovú súradnicu $\hat{\phi}'$. Vyjadrené v jednotkách m . Aj napriek nekonečnému namotávaniu krivky $\hat{\phi}'$ na horizont udalostí a $r = r_{\hat{\rho}'=0}$ je jej dĺžka konečná. Vnorená nadplocha je regulárna na horizonte udalostí pre $\delta = \delta_+$ (3.123).



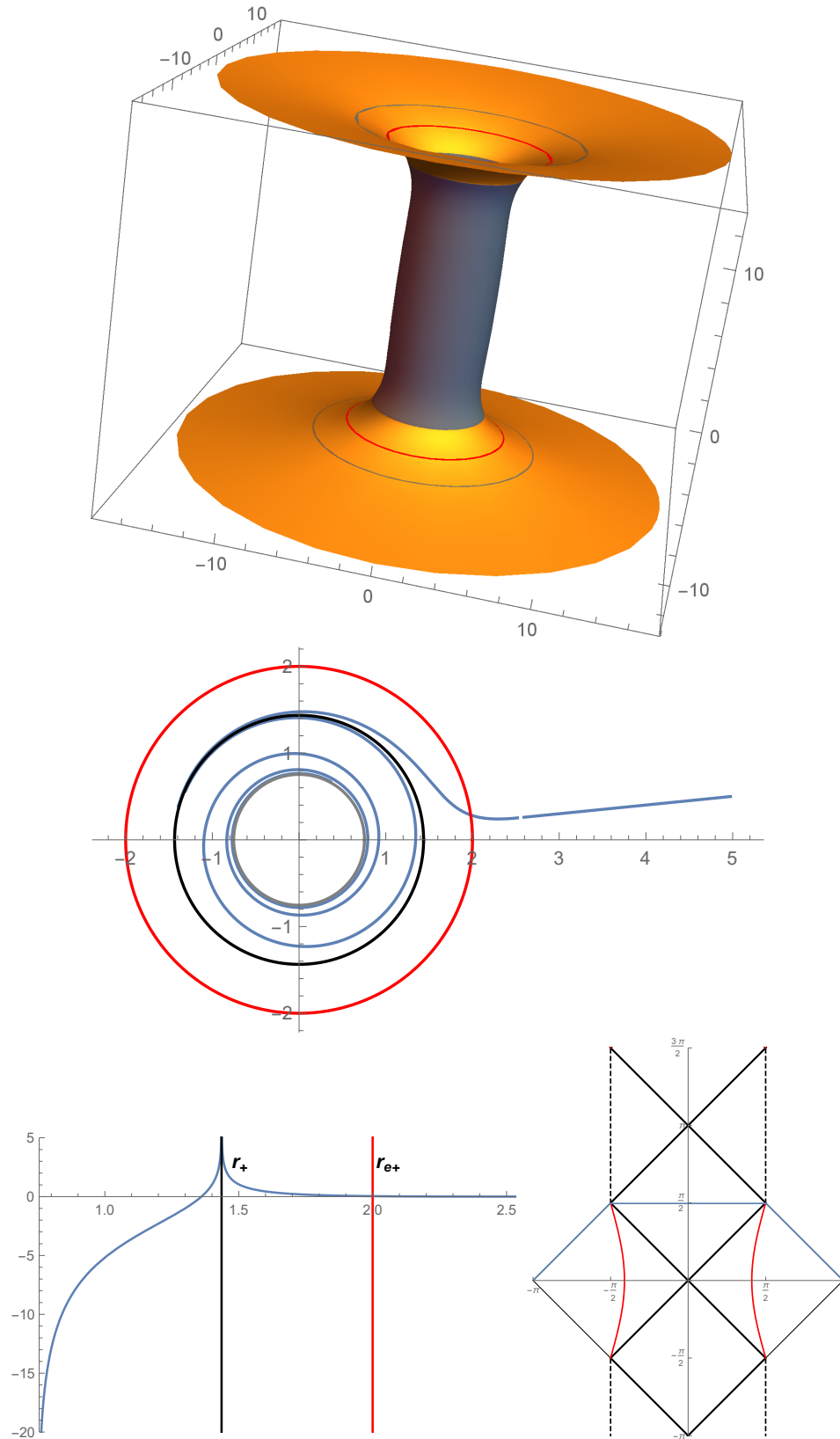
Obr. 3.19b: $\hat{\tau}'(0) = \pi/8$. Vyjadrené v jednotkách m .



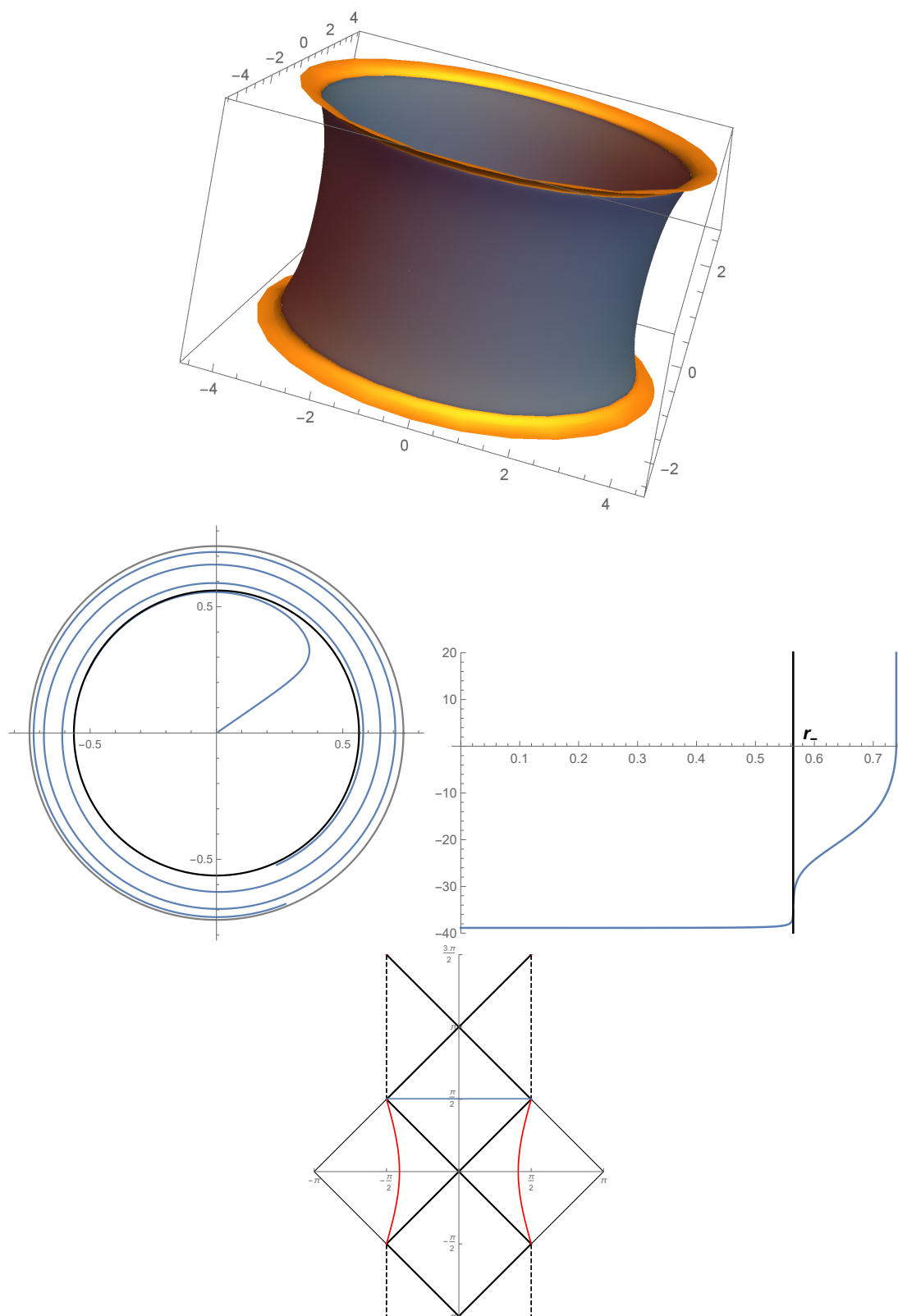
Obr. 3.19c: $\hat{\tau}'(0) = \pi/4$. Vyjadrené v jednotkách m .



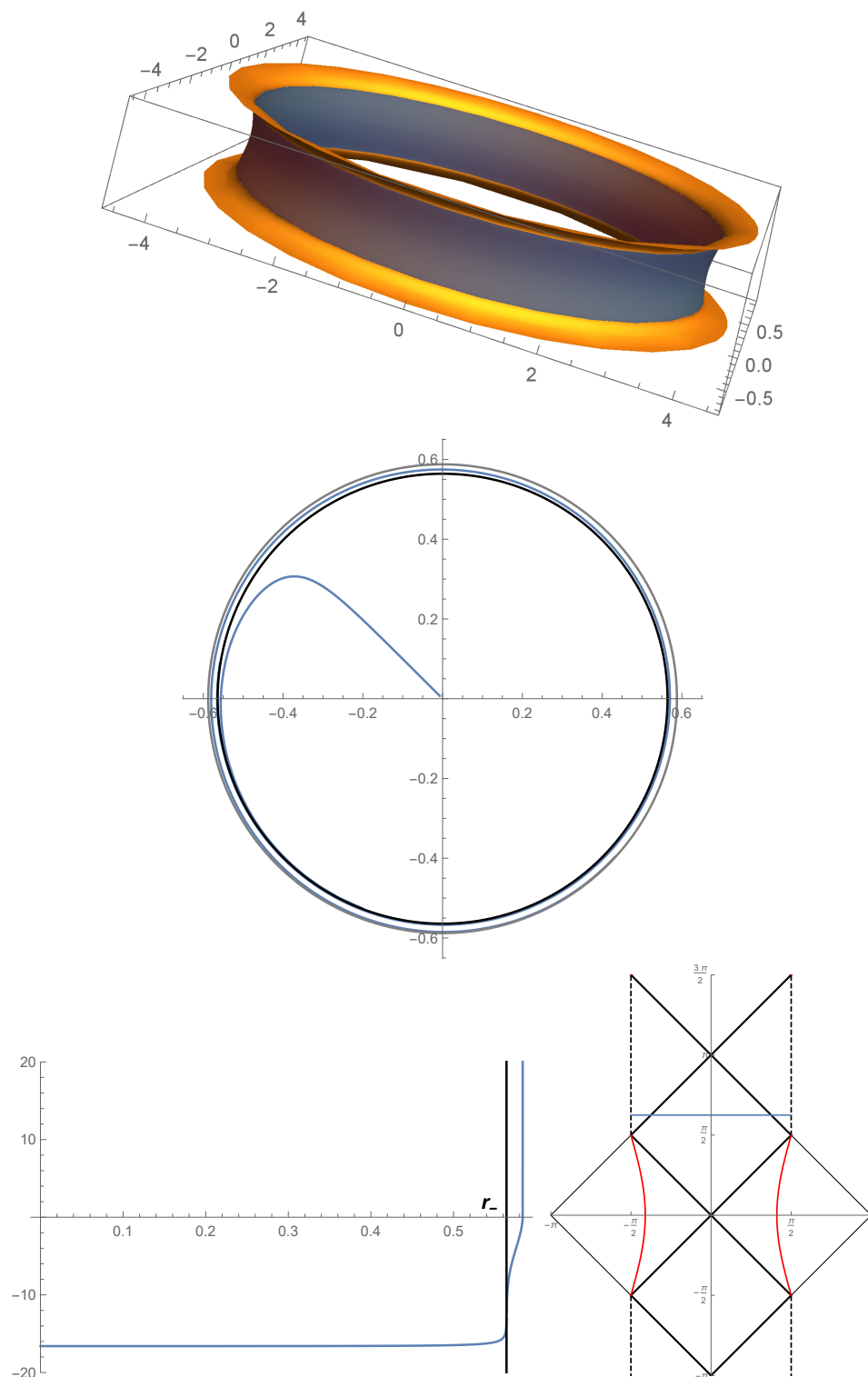
Obr. 3.19d: $\hat{\tau}'(0) = 3\pi/8$. Vyjadrené v jednotkách m .



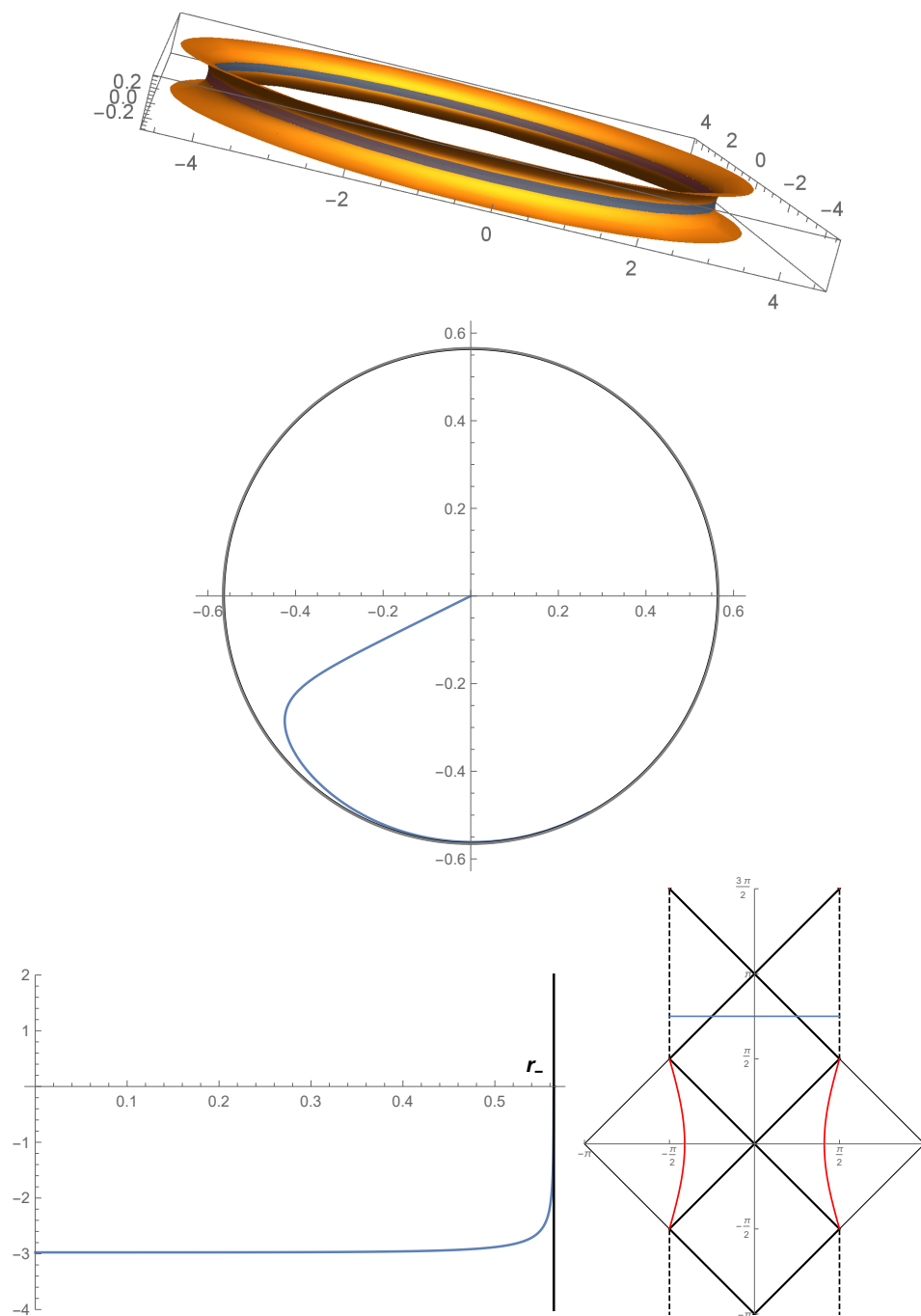
Obr. 3.19e: $\hat{\tau}'(0) = \pi/2 - 0.01$. Vyjadrené v jednotkách m . Možno si všimnúť rozširovanie Einsteinovho-Rosenovho mostu v blízkosti jeho stredu, zapríčinené závislosťou obvodového polomeru kriviek $t, r, \theta = \text{konšt.}$ pomocou funkcie $\sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ namiesto samotnej hodnoty súradnice r ako tomu bolo u RN (obr. 3.18).



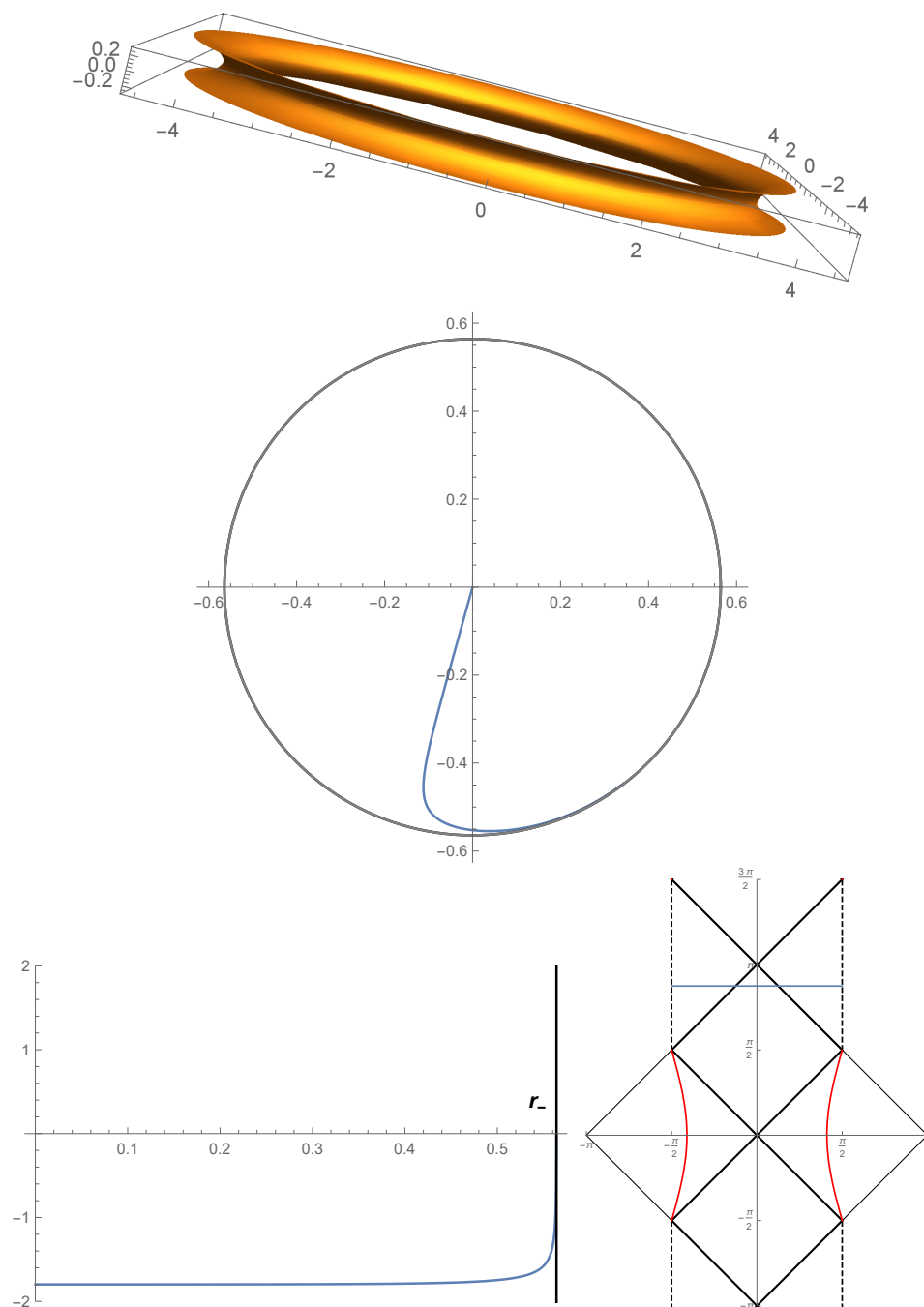
Obr. 3.19f: $\hat{\tau}'(0) = \pi/2 + 0.01$. Okolie singularity nemožno vnoriť pre $r < 0.468 < r_- = 0.564$. Vyjadrené v jednotkách m . Je vidieť zväčšovanie polomeru kružníc $r = \text{konšt.}$ smerom k singularite v protiklade k RN. Polomer na okolí singularity diverguje, čo v obrázku nie je viditeľné, keďže táto oblasť sa vnoriť nedá.



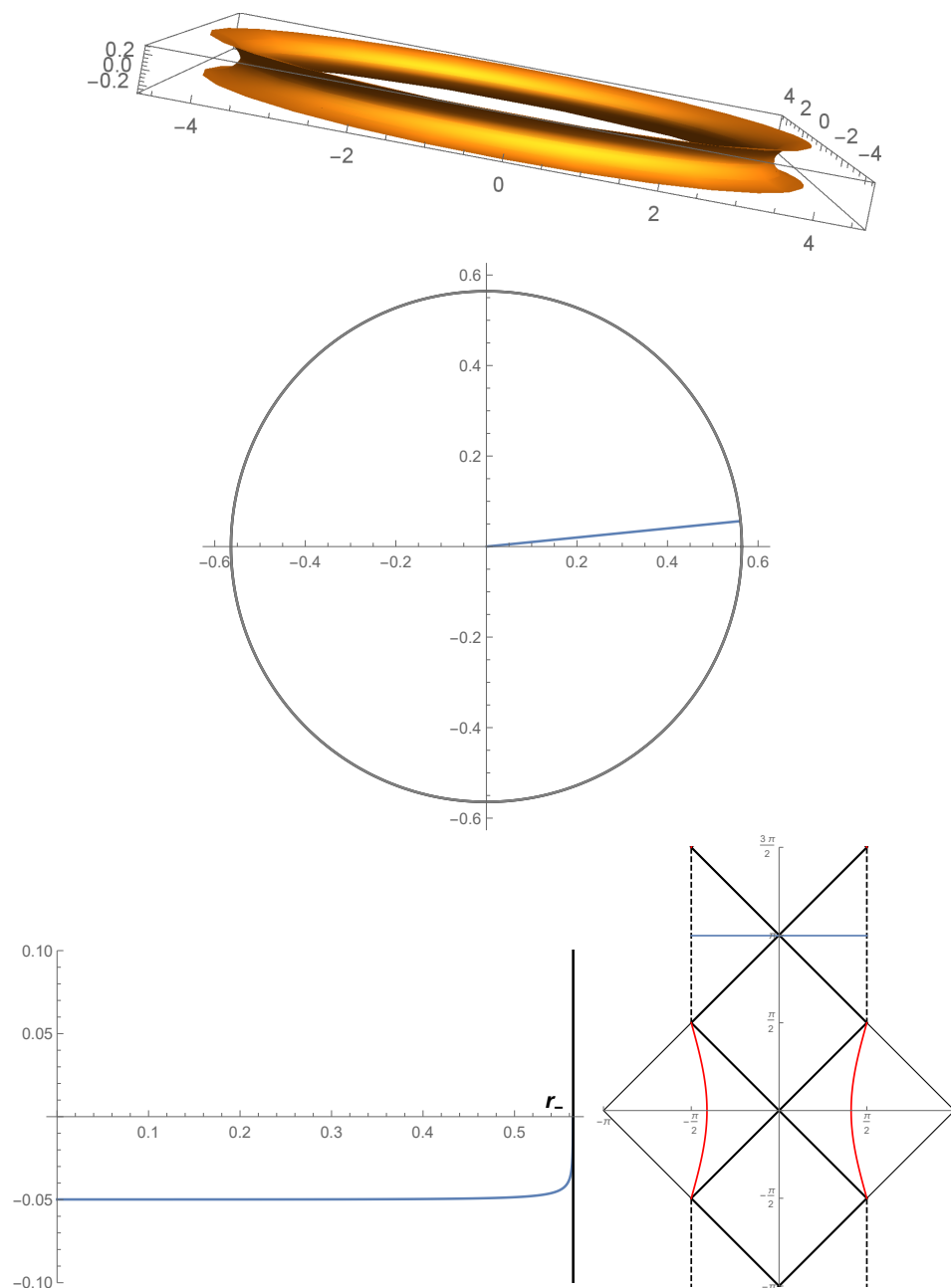
Obr. 3.19g: $\hat{\tau}'(0) = 5\pi/8$. Okolie singularity nemožno vnoriť pre $r < 0.468 < r_- = 0.564$. Vyjadrené v jednotkách m .



Obr. 3.19h: $\hat{\tau}'(0) = 3\pi/4$. Okolie singularity nemožno vnoriť pre $r < 0.468 < r_- = 0.564$. Vyjadrené v jednotkách m .



Obr. 3.19i: $\hat{\tau}'(0) = 7\pi/8$. Okolie singularity nemožno vnoriť pre $r < 0.468 < r_- = 0.564$. Vyjadrené v jednotkách m .



Obr. 3.19j: $\hat{r}'(0) = \pi - 0.01$. Okolie singularity nemožno vnoriť pre $r < 0.468 < r_- = 0.564$. Vyjadrené v jednotkách m .

3.3.2 Vnorenie ergosféry a horizontu udalostí

Vnorme reštrikciu ergosféry a horizontu udalostí na nadplochy $t = \text{konšt.}$ do Euklidovského priestoru. Pre ergosféru dostávame indukovanú metriku v BL súradniciach pokiaľ normalizujeme na $m = 1$

$$\frac{ds_e^2}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}}{1 - a^2 \cos^2 \theta} d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta} + a^2 \sin^2 \theta \right] d\varphi^2 \quad (3.133)$$

a pre $r = \text{konšt.}$:

$$ds_r^2 = \varrho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\varrho^2} \left[(r^2 + a^2) \varrho^2 + 2ra^2 \sin^2 \theta \right] d\varphi^2. \quad (3.134)$$

Indukované metriky sú v tvare $ds^2 = f(\theta) dr^2 + g(\theta) d\varphi^2$ a na vnorenie použijme cylindrické súradnice v Euklidovskom priestore r', z, φ . Vďaka axiálnej symetrii Kerrovho priestoročasu stotožníme uhlovú súradnicu v Euklidovskom priestore s BL súradnicou φ . Vnorovanú plochu vyjadríme parametricky $(r'(\theta), z(\theta), \varphi)$, kde parameter θ stotožníme s BL súradnicou θ a tento bude vystupovať ako súradnica na vnorenej ploche v Euklidovskom priestore. Spočítaním indukovanej metriky vnorovanej plochy v Euklidovskom priestore:

$$ds_{euklid}^2 \Big|_{r'=r'(\theta), z=z(\theta)} = \left[\left(\frac{dr'}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2 + r'^2 d\varphi^2. \quad (3.135)$$

Z toho vidíme, že pre plochu musíme požadovať

$$r'(\theta) = \sqrt{g(\theta)}. \quad (3.136)$$

Dosadením do (3.135) dostaneme diferenciálnu rovnicu pre z

$$\frac{dz}{d\theta} = \text{sgn} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sqrt{f - \frac{1}{4g} \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^2} \quad (3.137)$$

s počiatočnou podmienkou

$$z(\pi/2) = 0. \quad (3.138)$$

Znamienko pred odmocninou sme zvolili na základe reflexnej symetrie vnorovanej nadplochy cez ekvatoriálnu rovinu a voľby, aby pre $\theta = 0$ bola derivácia $dz/d\theta$ kladná.

Pre vonkajšiu ergosféru máme:

$$g(\theta) = 2 \sin^2 \theta \left(1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta} + a^2 \sin^2 \theta \right), \quad (3.139)$$

$$\frac{dg}{d\theta} = \sin 2\theta \left[2 + 2\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta} + \left(4 + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}} \right) a^2 \sin^2 \theta \right], \quad (3.140)$$

$$f(\theta) = 2 \frac{1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}}{1 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.141)$$

Vykreslením funkcie pod odmocninou v rovnici (3.137) sa možno presvedčiť, že výraz je v tomto prípade kladný a vnorenie možno urobiť pre celú ergosféru a pre ľubovoľnú hodnotu parametru $0 < a < 1m$.

Pre vonkajší horizont udalostí:

$$g(\theta) = \frac{(r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{\varrho_+^2}, \quad (3.142)$$

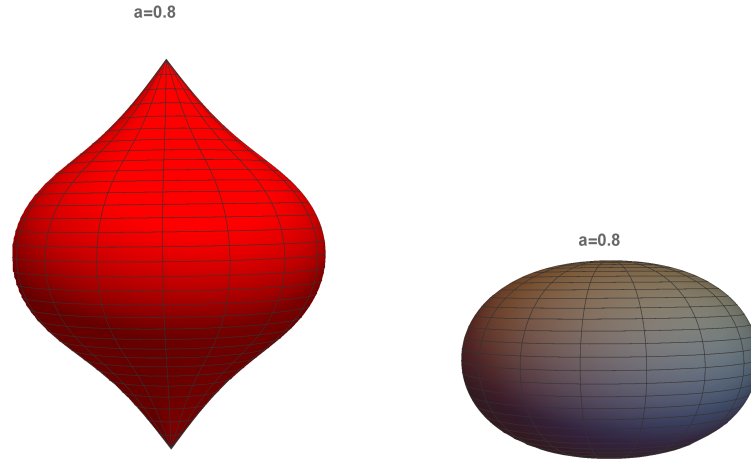
$$\frac{dg}{d\theta} = 2r_+ \left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right)^2 \sin 2\theta, \quad (3.143)$$

$$f(\theta) = \varrho_+^2, \quad (3.144)$$

dostaneme, že vnorenie nemožno vždy urobiť. To vidno z Taylorovho rozvoja funkcie pod odmocninou v (3.137) na okolí $\theta = 0$:

$$f - \frac{1}{4g} \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^2 = 2(1 - a^2 + \sqrt{1 - a^2})\theta^2 + O(\theta^4) \quad (3.145)$$

čo je záporné pre $a > \sqrt{3}m/2$ a teda pre tieto hodnoty parametru nemožno horizont vnoriť v okolí pólov. Pre $a < \sqrt{3}m/2$ však vnorenie urobiť možno pre celý horizont udalostí.

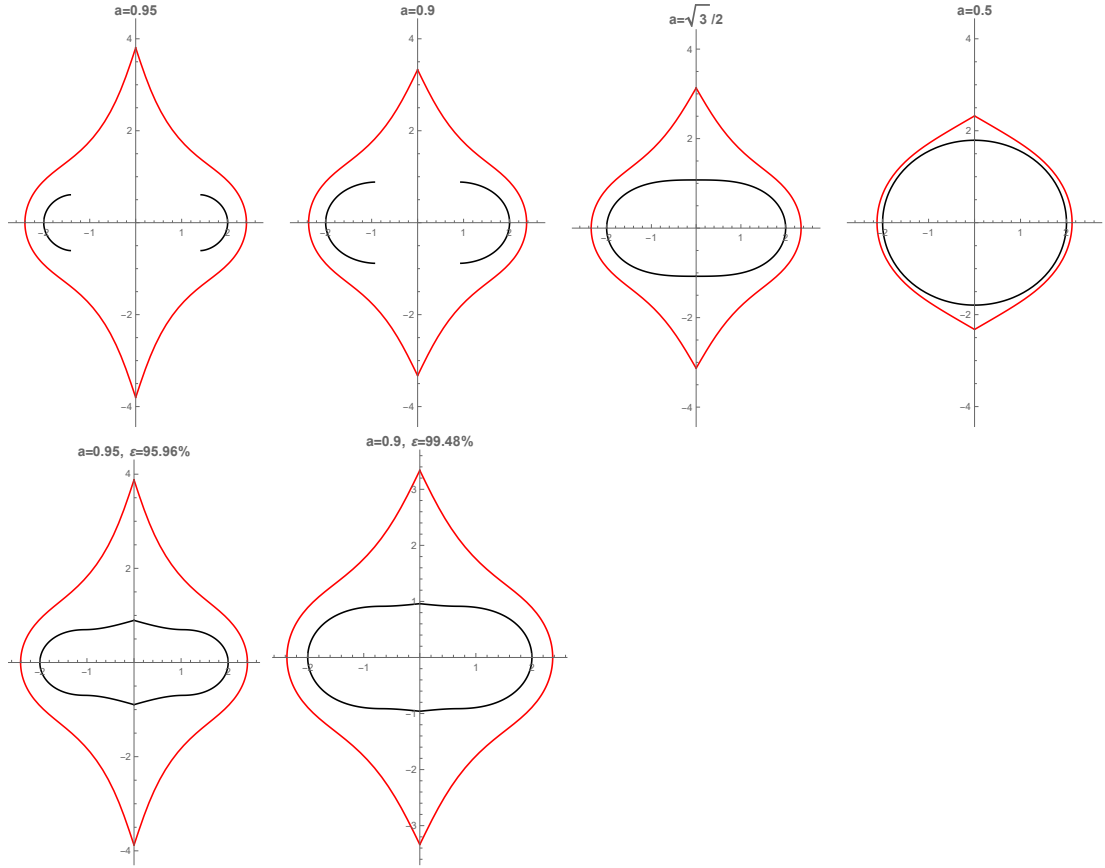


Obr. 3.20: Vľavo je zobrazená reštrikcia vonkajšej ergosféry na nadplochy $t = \text{konšt.}$ pre $a = 0.8$ vnorená v Euklidovskom priestore. Vpravo je vidieť reštrikcia vonkajšieho horizontu udalostí na nadplochy $t = \text{konšt.}$ pre $a = 0.8$ vnorená v Euklidovskom priestore. Vyjadrené v jednotkách m .

Výsledné vnorené plochy sú vyobrazené v obrázkoch 3.20 a 3.21. Ako prvé si možno všimnúť hrot na póloch vnorenej ergosféry. Spočítajme si deriváciu dz/dr' , ktorá vyjadruje ostrosť tohto hrotu.

Vyjadrením funkcie z ako funkcie od r' miesto θ dostaneme z (3.137)

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{dr'} \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{dg}{d\theta} \Rightarrow \frac{dz}{dr'} = \text{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sqrt{4gf \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^{-2} - 1}, \quad (3.146)$$



Obr. 3.21: Prierez reštrikciou vonkajšej ergosféry (červená) a horizontu udalostí (čierna) na nadplochy $t = \text{konšt.}$ vnorenej v Euklidovskom priestore pre rôzne hodnoty parametrov a a ε (udáva percentuálnu časť vnorovaného uhlu), vyjadrené v jednotkách m . Horný riadok pre $\varepsilon = 100\%$.

kde sme využili (3.136) a z tejto rovnice aj získame funkciu $\theta = \theta(r')$. Spočítajme limitu $\theta \rightarrow 0$, resp. $\theta \rightarrow \pi$. Pre ergosféru:

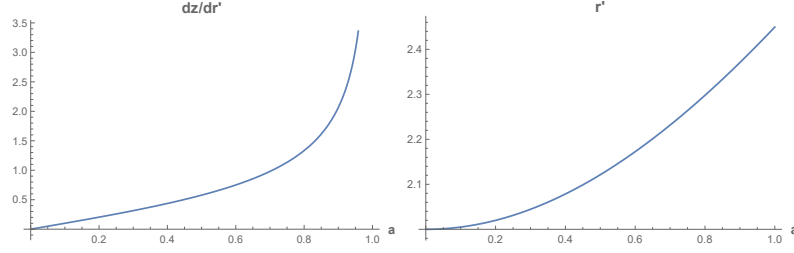
$$\lim_{\theta \rightarrow \{0, \pi\}} 4g \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^{-2} \Big|_{r_{e+}} \stackrel{r_{e+}}{=} \frac{1}{2r_+} \Rightarrow \frac{dz}{dr'} \Big|_{\theta \in \{0, \pi\}} \stackrel{r_{e+}}{=} \operatorname{sgn} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)_{\theta \in \{0, \pi\}} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (3.147)$$

a pre horizont udalostí:

$$\lim_{\theta \rightarrow \{0, \pi\}} 4g \left(\frac{dg}{d\theta} \right)^{-2} \stackrel{r_{\pm}}{=} \frac{1}{r_+^2 + a^2} \Rightarrow \frac{dz}{dr'} \Big|_{\theta \in \{0, \pi\}} \stackrel{r_{\pm}}{=} 0. \quad (3.148)$$

Horizont udalostí teda nijakú nespojitost na póloch nemá a to aj pre hodnoty parametrov a , pre ktoré vnorenie nie je možné urobiť. Ergosféra naopak nespojitost, ako sme spomínali, má a je daná výrazom (3.147). Pre južný pól je táto závislosť vyobrazená v obr. 3.22.

Tvar hrotu je možno trochu prekvapujúci pokiaľ uvažíme, že v Kerrovom priestoročase platí $r_{e+}|_{\theta=0} = r_+$ a inak $r_{e+} > r_+$. Z toho by sme mohli naivne očakávať, že súradnica z musí v okolí $\theta = 0$ pre ergosféru rásť pomalšie než pre horizont udalostí. Túto predstavu môže ešte umocniť fakt, že funkcia $g(\theta)$ udávajúca polomer kružníc $\theta = \text{konšt.}$ je okrem pólů vždy väčšia pre ergosféru než pre horizont udalostí. Príspevok krivosti v smere $\partial/\partial r$ však túto predstavu nabúrava.



Obr. 3.22: Vľavo je zobrazená závislosť dz/dr' v $\theta = 0$ na parametri a pre vonkajšiu ergosféru. Závislosť polomeru ergosféry v rovníkovej rovine na parametri a je zobrazená vpravo.

Spočítajme si ešte rovníkový polomer. Pre ergosféru dostaneme $r'(\theta = \pi/2) = \sqrt{2(2m^2 + a^2)}$ (obr. 3.22), zatiaľ čo pre horizont udalostí $r'(\theta = \pi/2) = 2m$. Dostávame tak zaujímavý fakt, že rovníkový obvod horizontu udalostí nezávisí na rýchlosti rotácie čiernej diery. Naopak, ako možno očakávať, polomer ergosféry sa s rastúcim a zväčšuje, pričom pre $a = 0$ je rovníkový polomer medzi ergosférou a horizontom udalostí rovnaký.

Keďže pre hodnoty parametru $a > \sqrt{3}m/2$ nemožno celý horizont udalostí vnoriť, vnorujeme len jeho výseč, tj. voľme zobrazenie $\varphi = \alpha\varepsilon$ analogicky ako v kapitole 1.2 v rovniciach (1.28) a (1.31). Rovnice (3.136) a (3.137) tak prejdú na tvar

$$r'(\theta) = \varepsilon \sqrt{g(\theta)} \quad (3.149)$$

a

$$\frac{dz}{d\theta} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sqrt{f - \frac{\varepsilon^2}{4g} \left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2}. \quad (3.150)$$

Výsledné grafy pre maximálne hodnoty parametru ε , pre ktoré je možné vnorenie celého horizontu udalostí urobiť, sú vyobrazené v obrázku 3.21 dole.

Záver

V práci sme sa ako prvé zaoberali vizualizáciou kauzálnej štruktúry priestoročasu Schwarzschildovej, Riessnerovej-Nordströmovej a Kerrovej čiernej diery. V prípade Schwarzschildovej a Riessnerovej-Nordströmovej sme tak učinili priamočiaro pomocou konformného diagramu (obr. 1.3, 2.4). Na jeho zostrojenie sme museli nájsť vhodné súradnice. Po zavedení korytnačej súradnice, ktorá je špecifická pre konkrétnu čiernu diery (v prípade Schwarzschildovej čiernej diery zavádzame korytnačiu súradnicu vzťahom (1.6) a v prípade Riessnerovej-Nordströmovej vzťahom (2.6)), sme vhodné súradnice zaviedli vzťahmi (1.8)-(1.13). Súradnice obsahujú dva parametre - integračnú konštantu pre korytnačiu súradnicu ρ_0 a parameter δ škálujúci súradnice t a ρ v transformačných vzťahoch (1.10) a (1.11).

Zatiaľ čo integračná konštanta korytnačej súradnice môže byť ľubovoľná, parameter δ je fixovaný podmienkou regularity metriky na konkrétnom horizonte udalostí. Keďže Schwarzschildova čierna diera obsahuje jediný horizont udalostí, je tento parameter fixovaný jednoznačne vzťahom (1.21). U Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery však máme horizonty udalostí dva a voľba tohto parametru pomocou výrazov (2.15)-(2.16) činí metriku regulárnou len pre daný horizont udalostí a na druhom metriku zostáva neregulárnou. Z toho dôvodu je vhodné ponechať tento parameter voľný a nesnažiť sa ho jednoznačne fixovať. Ako sme opisovali v kapitole 1.1.3, rast parametru δ spôsobuje v konformnom diagrame zahusťovanie kriviek $t, r = \text{konšt.}$, zatiaľ čo zmena parametru ρ_0 spôsobuje posun kriviek $r = \text{konšt.}$ (špeciálne výber tohto parametru možno chápať ako voľbu konkrétnej hodnoty súradnice ρ , na ktorej leží singularita) a krivky $t = \text{konšt.}$ nemení.

V prípade Kerrovej čiernej diery je situácia zložitejšia. Fakt, že neexistujú súradnice, v ktorých by bola metrika diagonálna, komplikuje výber zmysluplnej dvojrozmernej časupodobnej nadplochy, pre ktorú by bolo možné skonštruovať konformný diagram. Ako prvý krok sme teda vizualizovali kauzálnu štruktúru priestoročasu tým, že sme priestoročas foliovali nadplochami $t = \text{konšt.}$ a hľadali sme prienik chronologickej budúcnosti vybraného bodu s danou nadplochou (ktorý možno na oblasti mimo medzihorizontového priestoru interpretovať ako svetelný pulz po uplynutí daného času z pohľadu pozorovateľa ortogonálneho na nadplochy $t = \text{konšt.}$). Pre jednoduchosť sme uvažovali len infinitezimálne blízke okolie, na ktorom sa krivosť priestoročasu neprejavuje (obr. 3.1). Výsledné obrázky a diskusia k nim sú uvedené v kapitole 3.1.2. Najvýznamnejší efekt, ktorý v tejto čiernej diere nastáva, je vychýľovanie centra pulzu v smere $\partial/\partial\varphi$ daný mimo-diagonálnym metrickým koeficientom. Tento efekt je vyobrazený v obrázku 3.5.

V ďalšom kroku sme sa pokúsili skonštruovať konformný diagram aspoň na okolí horizontu udalostí, kde je kauzálna štruktúra najzaujímavejšia. Zaviedli sme

uhlovú súradnicu (3.48) adaptovanú na konkrétny horizont udalostí a s touto súradnicou dostaneme metriku do diagonálneho tvaru aspoň na horizonte udalostí. Na určitom okolí horizontu potom bude nadplocha konštantných hodnôt uhlových súradníc časupodobná a je možné skonštruovať konformný diagram zavedením korytnačej súradnice vzťahom (3.61) a následne zavedením súradníc vzťahmi (1.8)-(1.13) podobne, ako vo vyššie spomínaných čiernych dierach. Na okolí horizontu udalostí tak dostávame kvalitatívne rovnaký diagram ako v prípade Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery (obr. 3.19). Diagram možno vykresliť až po vnútorný horizont udalostí, ten je však na rozdiel od Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery na vybranej nadploche priestorupodobnou krivkou namiesto nulovej. Horizont udalostí je samozrejme nulovou plochou, priestorupodobný je len jej prienik s nadplochou na ktorej konštruujeme konformný diagram.

Tak ako sme mohli zaviesť súradnice v ktorých je metrika diagonálna na horizonte udalostí, môžeme zaviesť súradnice, pre ktoré je metrika diagonálna pre ľubovoľný bod konkrétnej nadplochy $r, \theta = \text{konšt.}$ Tento fakt sme využili v kapitole 3.2.3 na skonštruovanie kauzálneho diagramu, ktorý vyjadruje kauzálnu štruktúru podobne ako konformný diagram v prípade Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery. Zavedenie konformných súradníc vzťahmi (1.8)-(1.13) pre korytnačiu súradnicu definovanú vzťahom (3.118) však okrem ekvatoriálnej roviny v metrike vzniknú diagonálne členy $g_{\mu\theta}$. Navyše nadplochy $\theta = \text{konšt.}$ nie sú okrem ekvatoriálnej roviny definované nijakou symetriou priestoročasu. Z uvedených dôvodov sme preto konštruovali diagram len v ekvatoriálnej rovine.

Nedostatok diagramu je ten, že sme sa museli vzdať uhlovej súradnice φ . Tj. v diagrame existuje diagramová uhlová súradnica $\hat{\phi}'$, ale jej vzťah k priestoročasovým súradniciam nie je definovaný. Tento vzťah sa definuje až pomocou konkrétnej krivky, ktorú chceme v diagrame vykresliť, prípadne foliáciou priestoročasu pomocou rotačných nadplôch $t = t(r)$ vzťahom (3.114).

Majúc konformný diagram, tento sme využili na vizualizáciu dynamického vývoja čiernodierového priestoročasu. Priestoročas sme foliovali na priestorupodobné nadplochy (napr. obr. 2.7) a tie sme vnorili do Euklidovského priestoru. V prípade Kerrovej čiernej diery nemáme dobrý konformný diagram, ale pretože na zobrazenie dynamiky priestoročas foliujeme na priestorupodobné (rotačné) nadplochy, môžeme použiť kauzálny diagram skonštruovaný v kapitole 3.2.3 - ten je totiž dobre definovaný práve pre danú foliáciu priestoročasu.

Pretože regularita metriky je závislá na hodnote parametru δ a pretože tento parameter nemožno zvoliť pre Riessnerovú-Nordströmovú a Kerrovú čiernu diery tak, aby metrika bola regulárna v celom priestoročase, analyzovali sme v prípade Schwarzschildovej vplyv tohto parametru na vnorenú nadplochu v okolí horizontov udalostí (obr. 1.7, 1.8). V prípade Riessnerovej-Nordströmovej a Kerrovej čiernej diery nastáva rozdiel medzi vnútorným a vonkajším horizontom udalostí. Napr. nadplocha sa nedá vnoriť na okolí vonkajšieho horizontu udalostí pokiaľ $\delta < \delta_+$ a na vnútornom horizonte udalostí táto situácia nastáva pre $\delta > \delta_-$.

Vplyv parametru ρ_0 je najvýraznejší pre Schwarzschildovú čiernu diery, čo je dôsledok faktu, že táto má priestorupodobnú singularitu. Vývoj čiernodierového vesmíru sa potom dá rozdeliť na tri kategórie $\rho_0 < 0$, $\rho_0 = 0$ a $\rho_0 > 0$ tak, ako je to popísané v kapitole 1.2.3. Na vývoj vesmíru Riessnerovej-Nordströmovej a Kerrovej čiernej diery však tento parameter nemá veľký kvalitatívny vplyv.

Kvalitatívny tvar vnorených priestorupodobných nadplôch je veľmi podobný

v prípade Schwarzschildovej a Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery. V oboch prípadoch totiž súradnica r popisuje polomer kružníc $r = \text{konšt.}$ Naopak, v prípade Kerrove čiernej diery je polomer kružníc daný metrickým koeficientom $g_{\varphi\varphi}$, ktorý na okolí singularity diverguje (obr. 3.23). Všetky uvedené čierne diery však majú spoločný fakt, že okolie singularity vnoriť nejde. Jediná výnimka je v prípade Schwarzschildovej čiernej diery pre $\rho_0 < 0$ a $\hat{\tau}_0 = -\tanh \rho_0/2\delta$ (obr. 1.12). Motivovaný touto výnimkou sme analyzovali pre aké krivky (striktne vzato sa jedná o rotačné nadplochy definované krivkou $t(r)$) je vnorenie možné urobiť až do singularity. Dostali sme podmienku (1.56), ktorá musí platiť na nejakom okolí singularity. Tá vyjadruje fakt, že vnorované krivky musia lepšie kopírovať tvar singularity než krivky $\hat{\tau} = \text{konšt.}$ (s uvedenou výnimkou) tak, ako je to vyobrazené v obrázku 1.9.

Nakoniec sme pre Kerrovu čiernu dieru vnorili prienik vonkajšej ergosféry a vonkajšieho horizontu udalostí s nadplochami $t = \text{konšt.}$ do Euklidovského priestoru v kapitole 3.3.2 (obr. 3.30, 3.31). Zaujímavosťou v prípade vonkajšieho horizontu udalostí môže byť, že ho nie je možné vnoriť (vybraným zobrazením) v okolí pólov pre hodnoty parametru a blízke m . U vonkajšej ergosféry je zase zaujímavosťou, že na póloch nastáva nespojitosť a táto nespojitosť má opačný tvar, než by sme mohli naivne očakávať z faktu, že na póloch ergosféry s horizontom udalostí splýva a že pre vonkajšiu ergosféru platí $r_{e+}(\theta) > r_+$ pre ľubovoľnú hodnotu súradnice θ .

Možstvo výsledkov uvedených v tejto práci je pomerne dobre známych. Hlavne v prípade Schwarzschildovej a Riessnerovej-Nordströmovej čiernej diery je konformný diagram skonštruovaný v množstve učebníc zaoberajúcich sa všeobecnou teóriou relativity, príp. čiernymi dierami. Taktiež na kvalitatívny tvar vnorených nadplôch, ako napríklad spojenie paralelných vesmírov Einsteinovým-Rosenovým mostom, je možné v literatúre často naraziť. V tejto práci sme podrobne rozobrali technické detaily vedúce k výsledkom a analyzovali sme závislosť výsledku na hodnotách rôznych parametrov, ako sme uviedli vyššie.

Pre Kerrovu čiernu dieru sú však uvedené výsledky menej známe. Stáčanie svetelných kuželov, či vnorenie ergosféry a horizontu udalostí je síce možné v literatúre nájsť, no s konformným diagramom na okolí horizontu udalostí som sa osobne ešte nestretol. V literatúre je možné nájsť aj konformný diagram pre celý Kerrov priestoročas, nie je mi však známe, ako tento mohol byť skonštruovaný. V práci sme sa na skonštruovanie diagramu analogickému konformnému diagramom skonštruovaným pre Schwarzschildovu či Riessnerovú-Nordströmovu čiernu dieru museli uchýliť k foliovaniu priestoročasu na konkrétne rotačné nadplochy. Táto časť práce, ktorú sme využili na vnorenie priestorupodobných nadplôch v ekvatoriálnej rovine v analógii s Riessnerovou-Nordströmovou čiernou dierou, je plne pôvodná.

Zoznam použitej literatúry

- J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. ISBN 978-0-521-88927-8.
- R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238., 1963.
- G. Nordström. On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, (20):1238., 1918.
- Barrett O'Neill. *The geometry of Kerr black holes*. Hamilton Printing Company, 1995. ISBN 1-56881-019-9.
- D. J. Raine and E. Thomas. *Black holes: an introduction*. 2nd. ed. London : Imperial College Press, 2010. ISBN 978-1-84816-383-6.
- H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Physik*, 355(50):106–120., 1916.
- K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, pages 189–196., 1916.
- H. Weyl. Zur die Gravitationstheorie. *Ann. Physik*, 359(54):117–145., 1917.